

DAY HỌC ỨNG DỤNG “ĐỊNH LÍ SIN” VÀO GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN NHẪM PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TOÁN HỌC CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Nguyễn Huy Thao¹,
Nguyễn Ngọc Giang^{1,+},
Phạm Huyền Trang²,
Nguyễn Thị Nga³,
Đương Minh Tới⁴

¹Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh;

²Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

³Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh;

⁴Trung tâm Toán Titan

+ Tác giả liên hệ • Email: nguyennngocgiang.net@gmail.com

Article history

Received: 10/11/2023

Accepted: 08/12/2023

Published: 05/02/2024

Keywords

Law of Sines, practical problems, competencies, solving mathematical problems, high school

ABSTRACT

Mathematics education contributes to the formation and development of students' key qualities, general and mathematical competences. In particular, the competence to solve mathematical problems is one of the core elements of mathematical competences, helping students develop core knowledge and skills and creating opportunities for students to experience and apply mathematics into practice. The research proposes a teaching process to apply the law of sines to solve practical problems to develop mathematical problem-solving capacity for high school students and illustrate this process through solving specific problems. The research method used in the article is theoretical research. Applying the proposed process into teaching practice shows that students appear excited and active in the learning process as well as develop components of mathematical problem-solving competency.

1. Mở đầu

Day học theo hướng phát triển năng lực giải quyết vấn đề là một trong những định hướng day học hiện đại, phù hợp với xu hướng đổi mới giáo dục hiện nay. Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 cũng đã đưa ra mục tiêu: môn Toán góp phần hình thành và phát triển cho HS năng lực toán học, bao gồm các năng lực toán học thành phần sau: năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học (GQVĐTH); năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (Bộ GD-ĐT, 2018). Như vậy, GQVĐTH là một năng lực cơ bản, cần hình thành và phát triển cho HS phổ thông.

Định lí Sin là một nội dung trọng tâm trong chương trình môn Toán ở THPT, có nhiều ứng dụng vào giải các bài toán thực tiễn. Nội dung này có nhiều tiềm năng giúp HS hình thành và phát triển năng lực GQVĐTH, bởi bản chất của các bài toán thực tiễn ứng dụng định lí Sin ngầm ẩn trong đó những kiến thức giúp HS phát hiện vấn đề, định hướng tìm tòi lời giải và giải quyết vấn đề. Ngoài ra, đây cũng là nội dung giúp HS đào sâu suy nghĩ, phát triển tư duy, khái quát hóa vấn đề. Do vậy, việc day học ứng dụng định lí Sin trong các bài toán thực tiễn theo hướng phát triển năng lực GQVĐTH là cần thiết. Trong bài báo, chúng tôi trình bày một số khái niệm, đề xuất quy trình day học ứng dụng định lí Sin vào giải các bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực GQVĐTH cho HS THPT và minh họa quy trình này vào day học giải các bài toán thực tiễn cụ thể.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

- *Khái niệm về “vấn đề” trong day học môn Toán*: “Vấn đề” là khái niệm cơ bản, có nhiều cách quan điểm khác nhau. Tùy theo nhà nghiên cứu ở lĩnh vực nào thì sẽ có cách nhìn nhận khái niệm này theo lĩnh vực đó. Theo Phạm Văn Hoàn và cộng sự (1981): Bài toán sẽ không có tính chất vấn đề nếu như việc giải chúng chỉ đòi hỏi những phép tính máy móc, thực hiện chủ yếu theo trí nhớ, theo mẫu, hoặc chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức, không qua những khâu trung gian; trái lại, những bài toán thực sự có tính chất vấn đề nếu như chúng đặt HS trước những khó khăn xác định, đòi hỏi phải có sự cố gắng suy nghĩ, vận dụng kiến thức, thực hiện các thao tác trí tuệ cần thiết để giải quyết. Theo Thịnh Thị Bạch Tuyết (2016): Vấn đề trong day học Toán ở THPT là một bài toán mà HS chưa biết cách giải quyết nhưng có đủ kiến thức và kĩ năng cần thiết để giải quyết. Theo Từ Đức Thảo (2011): Vấn đề là một tình huống có tính vừa sức, thu hút và hấp dẫn đối với chủ thể, vì thế chủ thể muốn khám phá tình huống đó một cách đầy đủ để tăng thêm hiểu biết.

Trong bài báo này, chúng tôi đồng nhất khái niệm “vấn đề” với quan điểm của Nguyễn Bá Kim (2015): Vấn đề trong dạy học môn Toán là một câu hỏi hay một nhiệm vụ toán học đặt ra, trong đó chứa đựng những thách thức mà chủ thể chưa có phương án giải quyết ngay mà phải sáng tạo để tìm ra lời giải, nhưng họ đã được trang bị kiến thức, kỹ năng đầy đủ để giải quyết vấn đề.

- *Khái niệm “năng lực giải quyết vấn đề”*: Theo Trần Thị Quỳnh Trang (2023): “Năng lực giải quyết vấn đề” là khả năng cá nhân xác định rõ bản chất, mâu thuẫn cơ bản của vấn đề, huy động kinh nghiệm, tri thức, kỹ năng để giải quyết vấn đề một cách hiệu quả; bên cạnh đó, năng lực giải quyết vấn đề vừa được coi là công cụ nhận thức, vừa được coi là mục tiêu của quá trình học tập, chiêm lĩnh và vận dụng tri thức. Như vậy, có thể hiểu “năng lực giải quyết vấn đề” là năng lực vận dụng một cách linh hoạt, sáng tạo những kiến thức, kỹ năng và kinh nghiệm đã có của bản thân vào giải quyết một vấn đề, tình huống nào đó.

- *Khái niệm “năng lực GQVĐTH”*: Theo Phan Anh Tài (2014): Năng lực giải quyết vấn đề của HS trong dạy học môn Toán là tổ hợp các năng lực được bộc lộ qua các hoạt động trong quá trình giải quyết vấn đề. Theo Nguyễn Ngọc Hà và Nguyễn Văn Thái Bình (2020), năng lực GQVĐTH là tổ hợp các năng lực thể hiện ở các kỹ năng (thao tác tư duy và hành động) trong hoạt động học tập nhằm giải quyết có hiệu quả các nhiệm vụ của bài toán. Theo Phan Thị Tinh (2020): Năng lực giải quyết vấn đề của người học trong dạy học môn Toán là khả năng huy động kiến thức, kỹ năng, kinh nghiệm và các phẩm chất cá nhân khác để thực hiện hoạt động giải quyết vấn đề. Từ các nghiên cứu trên, có thể hiểu năng lực GQVĐTH là khả năng giải quyết có hiệu quả một vấn đề toán học nào đó, dựa trên cơ sở vận dụng các tri thức, kinh nghiệm và kỹ năng đã có.

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ GD-ĐT (2018), các thành tố của năng lực GQVĐTH của HS THPT bao gồm: (1) Nhận biết, phát hiện được vấn đề cần giải quyết bằng toán học: - Xác định được tình huống có vấn đề; - Thu thập, sắp xếp, giải thích và đánh giá được độ tin cậy của thông tin; (2) Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề: Lựa chọn và thiết lập được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề; (3) Sử dụng được các kiến thức, kỹ năng toán học tương thích (bao gồm các công cụ và thuật toán) để giải quyết vấn đề đặt ra: Thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề; (4) Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hóa được cho vấn đề tương tự: - Đánh giá được giải pháp đã thực hiện; - Phân ánh được giá trị của giải pháp; - Khái quát hóa được cho vấn đề tương tự.

2.2. Quy trình dạy học ứng dụng định lý Sin vào giải các bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trung học phổ thông

Trên cơ sở tham khảo quy trình dạy học phát triển năng lực GQVĐTH của Trần Minh Mẫn (2019), nghiên cứu của Nguyễn Ngọc Hà và Nguyễn Văn Thái Bình (2020), chúng tôi đề xuất quy trình dạy học ứng dụng định lý Sin vào giải các bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực GQVĐTH cho HS THPT gồm các bước:

- *Bước 1. Lựa chọn vấn đề thực tiễn giải được bằng cách ứng dụng định lý Sin*. GV cần lựa chọn bài toán thực tiễn có thể giải được bằng cách sử dụng định lý Sin. Tuy nhiên, bài toán thực tiễn cần thể hiện được hai yếu tố: một là tính thực tiễn của cuộc sống và hai là phương pháp giải bài toán sử dụng được định lý Sin.

- *Bước 2. Tìm hiểu vấn đề thực tiễn để giải bằng cách ứng dụng định lý Sin*. GV đóng vai trò là người hỗ trợ, đồng hành, đưa ra các câu hỏi dẫn dắt HS tìm hiểu vấn đề. Ở bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS thành tố 1 của năng lực GQVĐTH.

- *Bước 3. Mô hình hóa toán học vấn đề thực tiễn*. HS thông qua các gợi ý của GV thiết lập được mô hình toán học bằng cách sử dụng định lý Sin. Nghĩa là, HS lập được mô hình toán học dựa vào công thức: “Trong tam giác

ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ “. Ở bước này có nhiều cơ hội phát triển cho

HS thành tố 1 và 2 của năng lực GQVĐTH.

- *Bước 4. Giải quyết vấn đề thực tiễn bằng định lý Sin*. Thông qua mô hình toán học được thiết lập, HS lập luận đưa ra lời giải bằng cách sử dụng định lý Sin đối với vấn đề thực tiễn. Ở bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS thành tố 1, 2 và 3 của năng lực GQVĐTH.

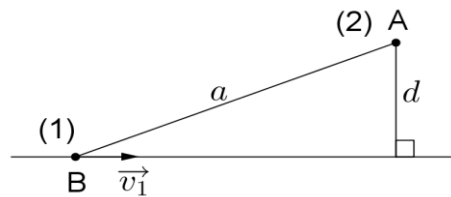
- *Bước 5. Nghiên cứu sâu vấn đề thực tiễn*. Ở bước này, GV yêu cầu HS đào sâu, tìm các cách giải khác đối với bài toán. HS biết cách khai thác và phát triển bài toán theo nhiều hướng khác nhau. Ở bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS cả 4 thành tố của năng lực GQVĐTH.

2.3. Minh họa dạy học ứng dụng định lý Sin vào giải các bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trung học phổ thông

Dưới đây, từ quy trình đã đề xuất ở tiểu mục 2.2, chúng tôi vận dụng vào giải các bài toán thực tiễn cụ thể theo các bước sau:

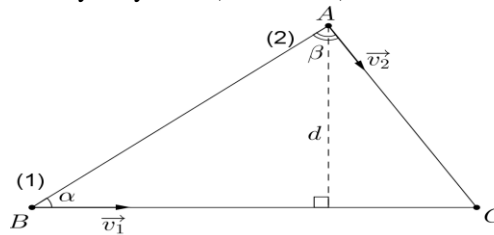
- *Bước 1. Lựa chọn vấn đề thực tiễn giải được bằng cách ứng dụng định lý Sin.* GV tìm tòi, phát hiện và lựa chọn bài toán thực tiễn có thể giải được thông qua ứng dụng định lý Sin. Bài toán thực tiễn sau đây cho HS lớp 10 có chứa tình huống gọi vấn đề:

Bài toán: Một chiếc xe máy chạy Grab chuyển động thẳng đều với vận tốc $v_1 = 50\text{km/h}$. Một hành khách cách xe máy một đoạn $a = 200\text{m}$ và cách đường một đoạn $d = 60\text{m}$, muốn đón xe máy chạy Grab. Hỏi hành khách ấy phải chạy theo hướng nào với vận tốc nhỏ nhất là bao nhiêu để đón được xe máy chạy Grab? (xem hình 1).



Hình 1

- *Bước 2. Tìm hiểu vấn đề thực tiễn để giải bằng cách ứng dụng định lý Sin.* GV hướng dẫn HS vẽ hình biểu diễn vị trí gặp nhau của hành khách và xe máy chạy Grab (xem hình 2).



Hình 2

GV hướng dẫn HS xác định thông tin của bài toán: Gọi C là vị trí gặp nhau sau khoảng thời gian t . Ta có AC và BC được tính là $AC = v_2 \cdot t$; $BC = v_1 \cdot t$ (với v_2 là vận tốc của người chạy bộ). Trong tam giác ABC , cạnh AB đã biết. Như vậy, ta có thể biểu diễn cạnh AC theo cạnh còn lại là BC . Hướng suy nghĩ này gọi nhắc cho HS sử dụng định lý Sin trong tam giác.

- *Bước 3. Mô hình hóa toán học vấn đề thực tiễn.* GV yêu cầu HS thiết lập mô hình hóa toán học bài toán thực tiễn: Áp dụng định lý Sin cho tam giác ABC đối với các cạnh AC và BC , ta có: $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta}$. Biểu diễn

$$AC = v_2 \cdot t; BC = v_1 \cdot t, \text{ ta được: } \frac{v_2 \cdot t}{\sin \alpha} = \frac{v_1 \cdot t}{\sin \beta} \Rightarrow v_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot v_1.$$

- *Bước 4. Giải quyết vấn đề thực tiễn bằng định lý Sin.* GV tổ chức cho HS tìm kiếm lời giải bài toán thông qua mô hình toán học: $v_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot v_1$. Để giải bài toán, HS cần xác định các yếu tố đã biết trong công thức

$$v_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot v_1, \text{ đó là } \sin \alpha \text{ và } v_1. \text{ Do vậy, } v_2 \text{ có giá trị nhỏ nhất khi } \beta \text{ phải thỏa mãn } \sin \beta \text{ lớn nhất. Nghĩa là}$$

$\beta = 90^\circ$. Từ những phân tích này, GV yêu cầu HS hoàn thành lời giải bài toán: Gọi C là vị trí gặp nhau sau khoảng thời gian t như hình 2. Ta có: $AC = v_2 \cdot t$; $BC = v_1 \cdot t$. Ứng dụng định lý Sin cho tam giác ABC đối với các cạnh

$$AC \text{ và } BC, \text{ ta được: } \frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \beta}.$$

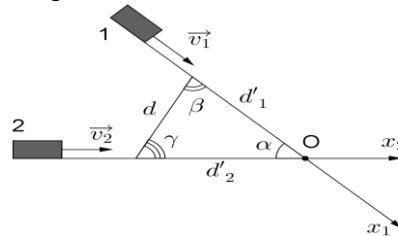
Biểu diễn $AC = v_2 \cdot t$; $BC = v_1 \cdot t$, ta có: $\frac{v_2 \cdot t}{\sin \alpha} = \frac{v_1 \cdot t}{\sin \beta} \Rightarrow v_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot v_1$. Vì $\sin \alpha$, v_1 đã biết nên v_2 có

giá trị nhỏ nhất khi $\beta = 90^\circ$. Vận tốc nhỏ nhất của người chạy bộ là: $(v_2)_{\min} = \sin \alpha \cdot v_1 = 15 \text{ (km/h)}$.

- *Bước 5: Nghiên cứu sâu vấn đề thực tiễn.* GV có thể khắc sâu kiến thức cho HS thông qua việc cho các em giải các bài toán tương tự nhưng với một nội dung khó hơn. Như vậy, có thể thấy ở bước 5, HS có nhiều cơ hội phát triển cả 4 thành tố của năng lực QCVĐTH.

Bài toán tương tự. Hai vật chuyển động thẳng đều trên hai đường thẳng tạo với nhau một góc $\alpha = 30^\circ$, với tốc độ $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$ và đang hướng về phía giao điểm O. Tại thời điểm khoảng cách giữa hai vật nhỏ nhất thì vật 1 cách giao điểm một đoạn $d'_1 = 30\sqrt{3}m$. Hỏi vật 2 cách giao điểm một đoạn bao nhiêu? (Nguyễn Đức Anh và Nguyễn Thế Hiền, 2019).

+ *Tìm hiểu vấn đề thực tiễn để giải bằng cách ứng dụng định lý Sin:* Gọi d_1 , d_2 lần lượt là khoảng cách từ vật 1 và vật 2 đến O lúc đầu ($t = 0$). d'_1 , d'_2 lần lượt là khoảng cách từ vật 1 và vật 2 đến O khi khoảng cách giữa hai vật d nhỏ nhất sau thời gian t . GV hướng dẫn HS vẽ hình cho bài toán (xem hình 3).



Hình 3

Trong tam giác có ba cạnh, với cạnh d đã biết, ta có thể biểu diễn cạnh d'_1 theo cạnh còn lại là d'_2 . Hướng suy nghĩ này gợi nhắc cho HS ứng dụng định lý Sin trong tam giác.

+ *Mô hình hóa toán học vấn đề thực tiễn.* GV yêu cầu HS thiết lập mô hình toán học của bài toán thực tiễn: Áp dụng định lý Sin cho tam giác có 3 cạnh d , d'_1 , d'_2 , ta được phương trình:

$$\frac{d}{\sin \alpha} = \frac{d'_1}{\sin \gamma} = \frac{d'_2}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{d}{\sin \alpha} = \frac{d_1 - v_1 t}{\sin \gamma} = \frac{d_2 - v_2 t}{\sin \beta}$$

Vì $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$, nên thay vào phương trình, ta được: $\frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{d_1 - v_1 t}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{3}d_2 - v_1 t}{\sqrt{3} \sin \beta}$. Áp dụng tính chất của

phân thức, ta được: $\frac{d_1 - v_1 t}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{3}d_2 - v_1 t}{\sqrt{3} \sin \beta} = \frac{(\sqrt{3}d_2 - v_1 t) - (d_1 - v_1 t)}{\sqrt{3} \sin \beta - \sin \gamma} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3} \sin \beta - \sin \gamma} \Rightarrow \frac{d}{\sin 30^\circ}$

$= \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3} \sin \beta - \sin \gamma}$ (1). Áp dụng công thức: $\sin \beta = \sin(180^\circ - \beta) = \sin(\alpha + \gamma) = \sin(30^\circ + \gamma)$

$\Rightarrow \sqrt{3} \sin \beta = \sqrt{3} \sin(30^\circ + \gamma) \Rightarrow \sqrt{3} \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma + \frac{3}{2} \sin \gamma$ (2). Thay (2) vào (1) ta được:

$$\frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma + \frac{3}{2} \sin \gamma - \sin \gamma} \Rightarrow d = \frac{(\sqrt{3}d_2 - d_1) \sin 30^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \gamma + \frac{1}{2} \sin \gamma} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3} \cos \gamma + \sin \gamma}$$

Vậy: $d = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{\sqrt{3} \cos \gamma + \sin \gamma} = \frac{\sqrt{3}d_2 - d_1}{y}$. Khoảng cách giữa hai vật nhỏ nhất $d_{\min} \Leftrightarrow y_{\max}$, với

$y = \sqrt{3} \cos \gamma + \sin \gamma$.

+ *Giải quyết vấn đề thực tiễn bằng định lí Sin.* Dựa vào mô hình đã được thiết lập ở bước 3, GV yêu cầu HS đưa ra lời giải hoàn thiện của bài toán. Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ vật 1 và vật 2 đến O , ở thời điểm ban đầu ta xét ($t = 0$). Gọi d'_1, d'_2 lần lượt là khoảng cách từ vật 1 và vật 2 đến O khi khoảng cách giữa hai vật là d nhỏ nhất sau thời gian t . Khi đó, ta có khoảng cách giữa hai vật là nhỏ nhất hay $d_{\min} \Leftrightarrow y_{\max}$, với $y = \sqrt{3} \cos \gamma + \sin \gamma$. Áp dụng bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$, ta được:

$$\sqrt{(\sqrt{3} \cos \gamma + \sin \gamma)^2} \leq \sqrt{[(\sqrt{3})^2 + 1^2] \cdot [(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma)]} = 2 \Rightarrow y_{\max} = 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = 30^\circ$ và $\beta = 120^\circ$.

Lúc đó: $\frac{d'_1}{\sin 30^\circ} = \frac{d'_2}{\sin 120^\circ} \Rightarrow d'_2 = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot d'_1 = \sqrt{3}d'_1 = 90$ (m). Vậy, khoảng cách từ vật 2 đến O lúc

này là $d'_2 = 90$ (m).

3. Kết luận

Ở THPT, định lí Sin là một nội dung quan trọng, có nhiều tiềm năng giúp HS phát triển năng lực toán học. Bài báo đã xây dựng quy trình dạy học phát triển năng lực GQVĐTH cũng như cách thức tổ chức dạy học phát triển năng lực GQVĐTH đối với việc ứng dụng định lí Sin vào giải các bài toán thực tiễn. Thực tiễn dạy học cho thấy, thông qua việc khai thác các bài toán thực tiễn có thể giải được bằng cách ứng dụng định lí Sin đã giúp HS có cơ hội phát triển được năng lực GQVĐTH. HS biết khắc sâu kiến thức, phát triển tư duy phân tích, tổng hợp và đặc biệt biết nhìn vấn đề bằng nhiều cách khác nhau, cũng như biết tìm tòi, phát triển bài toán ban đầu thành các bài toán mới, từ đó các em lĩnh hội được kiến thức một cách sâu sắc.

Tài liệu tham khảo

- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Nguyễn Bá Kim (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn Đức Anh, Nguyễn Thế Hiền (2019). *Đột phá tư duy bồi dưỡng học sinh giỏi Vật lí 10* (tập 1). NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Nguyễn Ngọc Hà, Nguyễn Văn Thái Bình (2020). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học trong dạy học giải phương trình bằng phương pháp vectơ ở trường trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt kì 1 tháng 5*, 98-104.
- Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981). *Giáo dục học môn Toán*. NXB Giáo dục.
- Phan Anh Tài (2014). *Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề của học sinh trong dạy học toán lớp 11 trung học phổ thông*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Vinh.
- Phan Thị Tình (2020). Một số biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề cho học sinh trung học phổ thông trong dạy học chủ đề “Tổ hợp và xác suất” (Đại số và Giải tích 11). *Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt kì 2 tháng 5*, 72-75.
- Từ Đức Thảo (2011). *Bồi dưỡng năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh trung học phổ thông trong dạy học hình học*. Luận án tiến sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Vinh.
- Thịnh Thị Bạch Tuyết (2016). *Dạy học Giải tích ở trường trung học phổ thông theo hướng bồi dưỡng năng lực giải quyết vấn đề thông qua trang bị một số thủ pháp hoạt động nhận thức cho học sinh*. Luận án tiến sĩ Khoa học giáo dục, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.
- Trần Minh Mẫn (2019). Xây dựng thang đánh giá năng lực giải quyết vấn đề thực tiễn của học sinh trong dạy học môn Toán ở trung học cơ sở. *Tạp chí Giáo dục*, 463, 35-39.
- Trần Thị Quỳnh Trang (2023). *Năng lực hợp tác giải quyết vấn đề của học sinh trung học cơ sở*. Luận án tiến sĩ Tâm lí học, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.