

VẬN DỤNG QUY TRÌNH MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC NỘI DUNG “HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC” (TOÁN 10)

Bùi Anh Kiệt¹⁺,
Trần Văn Quân²

¹Trường Đại học Cần Thơ; ²Trường Trung học phổ thông Phan Ngọc Hiền,
huyện Năm Căn, tỉnh Cà Mau
+ Tác giả liên hệ • Email: bakiet@ctu.edu.vn

Article history

Received: 25/12/2023

Accepted: 31/01/2024

Published: 05/4/2024

Keywords

Competencies, mathematical modeling procedure, quantitative systems, math 10

ABSTRACT

According to the 2018 Mathematics General Education Curriculum, in teaching Mathematics, one of the basic competencies that need to be formed for students is the math modeling competence. Through modeling activities, students can establish a mathematical model to describe the situation, thereby providing solutions to mathematical problems posed in the established model. The research study develops a mathematical modeling procedure in teaching Mathematics and applies this procedure in teaching the topic “Quantitative relations in triangles” (Math 10). With the steps of the proposed mathematical modeling procedure, students can naturally review and consolidate their knowledge of quantitative relations in triangles, especially the Sine theorem. Teachers’ effective use of the modeling procedure to solve practical situations in teaching Mathematics will help students develop the mathematical modeling competency.

1. Mở đầu

Để thực hiện Nghị quyết số 29-NQ/TW của Ban Chấp hành Trung ương (2013), ngành Giáo dục đã và đang đang triển khai đổi mới căn bản, toàn diện GD-ĐT, đáp ứng yêu cầu CNH, HĐH trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế; tiếp tục đổi mới mạnh mẽ phương pháp dạy và học theo hướng hiện đại, phát huy tính tích cực, chủ động, sáng tạo và vận dụng kiến thức, kỹ năng của người học, tạo cơ sở để người học tự cập nhật và đổi mới tri thức, kỹ năng, phát triển năng lực. Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, môn Toán ở THPT góp phần giúp HS thiết lập được mô hình toán học để mô tả tình huống, từ đó đưa ra cách giải quyết vấn đề toán học đặt ra trong mô hình được thiết lập; thực hiện, trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề và đánh giá được giải pháp (Bộ GD-ĐT, 2018). Do vậy, thông qua hoạt động mô hình hóa trong dạy học môn Toán không những giúp HS lĩnh hội được kiến thức, thấy được mối liên hệ giữa toán học với thực tiễn mà còn hình thành và phát triển năng lực mô hình hóa toán học (MHHTH) - một trong những năng lực cốt lõi của năng lực toán học.

“Hệ thức lượng trong tam giác” trong chương trình Toán 10 là một nội dung cơ bản, có nhiều nội dung có mối liên hệ chặt chẽ với các tình huống thực tiễn và trong các lĩnh vực khoa học khác. Trong đó, người học có thể sử dụng định lý Cosin và định lý Sin để tính khoảng cách giữa hai điểm trên thực tế (mà không cần đo trực tiếp) thông qua mô hình toán học. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số vấn đề lý luận, xây dựng quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán ở THPT và minh họa quy trình này trong dạy học nội dung trên nhằm giúp HS thiết lập mô hình toán học để giải quyết tình huống thực tiễn, từ đó hình thành và phát triển năng lực, đặc biệt là năng lực MHHTH.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số vấn đề lý luận

2.1.1. Mô hình hóa toán học

Theo Nguyen (2016), mô hình hóa được biết đến như một phương pháp dạy học, cung cấp cho HS hiểu khái niệm của vấn đề, giúp các em đọc hiểu, thiết lập và giải quyết vấn đề cụ thể dựa trên tình huống thực tiễn. Theo Edwards và Hamson (2001), MHHTH là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tiễn sang một vấn đề toán học thông qua việc thiết lập và giải quyết các mô hình toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tiễn, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận. Greefrath và cộng sự (2023) cho rằng, MHHTH sẽ giúp HS phổ thông trang bị các kiến thức và kỹ năng cần thiết để giải quyết các bài toán phức tạp đòi hỏi năng lực MHHTH. Theo Niss và Blum (2020), MHHTH là sự giải thích ngôn ngữ toán học cho một hệ thống ngoài toán học, với các câu hỏi xác định mà người ta đặt ra trên hệ thống này; là quá trình xây dựng một mô hình toán học cho vấn đề ngoài toán học, giải quyết vấn đề bằng ngôn ngữ toán học, rồi kiểm tra và đánh giá kết quả trong ngữ cảnh thực tiễn, cải tiến mô

hình nêu cách giải quyết không thể chấp nhận. Theo Nguyễn Danh Nam (2020), khi sử dụng toán học để giải quyết vấn đề, tình huống thực tiễn thì mô hình toán học và quá trình MHHTH là những công cụ cần thiết.

Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi, “MHHTH” là phương pháp giúp HS tìm hiểu, khám phá các tình huống thực tiễn bằng các công cụ và ngôn ngữ toán học, từ đó vận dụng kiến thức, kỹ năng toán học vào giải quyết bài toán đặt ra.

2.1.2. Một số quy trình mô hình hóa toán học điển hình trong dạy học môn Toán

“Quy trình MHHTH” là quy trình thiết lập một mô hình toán học cho vấn đề ngoài toán học, giải quyết vấn đề trong mô hình đó, rồi thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nêu cách giải quyết không thể chấp nhận (Lê Thị Hoài Châu, 2014). Để thực hiện nhiệm vụ mô hình hóa, chúng ta cần thông qua quy trình MHHTH.

Niss và Blum (2020) đã đưa ra quy trình MHHTH gồm 7 bước: - Bước 1: Hiểu tình huống thực tiễn đã cho, xây dựng một mô hình cho tình huống, khám phá và thiết lập mục tiêu giải quyết cho tình huống; - Bước 2: Đơn giản hóa tình huống và đưa các biến phù hợp để được mô hình thực của tình huống, lựa chọn các biến quan trọng để mô tả tình huống; - Bước 3: Chuyển từ mô hình thực sang mô hình toán học, thiết lập mô hình toán học bằng công cụ và ngôn ngữ toán học, mô tả mối quan hệ giữa các biến số; - Bước 4: Làm việc trong môi trường toán học, phân tích các mối quan hệ giữa các biến để rút ra kết luận; - Bước 5: Thể hiện kết quả trong ngữ cảnh thực tiễn; - Bước 6: Xem xét tính phù hợp của kết quả; - Bước 7: Trình bày cách giải quyết vấn đề.

Stillman và cộng sự (2008) đã đưa ra quy trình MHHTH gồm 6 bước: - Bước 1: Hiểu tình huống đã cho, đưa ra các điều kiện và giả thiết phù hợp để tạo ra một mô hình thực tế của tình huống; - Bước 2: Xây dựng mô hình toán biểu diễn cho mô hình thực tế; - Bước 3: Làm việc trong môi trường toán học để thu được kết quả toán học; - Bước 4: Thể hiện kết quả trong ngữ cảnh thực tế; - Bước 5: Xem xét tính hợp lý, thỏa đáng của kết quả thực tế hay quyết định thực hiện lại quá trình lần 2; - Bước 6: Trình bày cách giải quyết vấn đề.

Nguyễn Danh Nam (2015) đã đề xuất các bước MHHTH gồm: - Bước 1: Tìm hiểu, xây dựng cấu trúc, làm sáng tỏ, phân tích, đơn giản hóa vấn đề, xác định giả thuyết, tham số, biến số trong phạm vi của vấn đề thực tế; - Bước 2: Thiết lập mối liên hệ giữa các giả thuyết khác nhau đã đưa ra; - Bước 3: Xây dựng bài toán bằng cách lựa chọn và sử dụng ngôn ngữ toán học mô tả tình huống thực tế; - Bước 4: Sử dụng các công cụ toán học thích hợp để giải bài toán; - Bước 5: Hiểu được lời giải của bài toán, ý nghĩa của mô hình toán học trong bối cảnh thực tế; - Bước 6: Kiểm nghiệm mô hình (ưu điểm và hạn chế), kiểm tra tính hợp lý và tối ưu của mô hình đã xây dựng; - Bước 7: Thông báo, giải thích, dự đoán, cải tiến mô hình hoặc xây dựng mô hình có độ phức tạp cao hơn sao cho phù hợp với thực tế.

Lê Thị Hoài Châu (2014) đã đưa ra quy trình MHHTH gồm 4 bước: - Bước 1: Xây dựng mô hình phỏng thực tiễn của vấn đề, tức là xác định các yếu tố có ý nghĩa quan trọng nhất và xác lập các quy luật; - Bước 2: Xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình phỏng thực tiễn; - Bước 3: Sử dụng các công cụ toán học để khảo sát và giải bài toán hình thành ở bước hai; - Bước 4: Phân tích và kiểm định lại các kết quả thu được ở bước ba. Ở bước này, cần xác định mức độ phù hợp của mô hình và kết quả tính toán với vấn đề thực tế. Nếu kết quả không thể chấp nhận được thì phải lặp lại quá trình để tìm câu trả lời phù hợp cho bài toán ban đầu.

Quy trình MHHTH không được quy định tường minh trong chương trình, nhưng nếu HS luyện tập theo quy trình, các em sẽ phát triển được các năng lực toán học, đặc biệt là năng lực MHHTH.

2.2. Quy trình mô hình hóa toán học trong dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông

Từ các quy trình MHHTH của Lê Thị Hoài Châu (2014), Nguyễn Danh Nam (2015), Stillman và cộng sự (2008), Niss và Blum (2020), cùng với mục tiêu của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán đối với từng cấp học, chúng tôi đề xuất quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán ở THPT gồm 4 bước như sau:

- *Bước 1. Quan sát và thu thập các số liệu, dữ kiện của tình huống thực tiễn:* Bước này giúp HS khái quát tình huống đang xét, xác định được các yếu tố có liên quan và đưa ra yêu cầu của tình huống, từ đó kết nối giữa toán học và thực tiễn.

- *Bước 2. Xây dựng mô hình toán học:* GV hướng dẫn cho HS phân tích được tình huống, làm rõ những mối liên hệ giữa yếu tố đã biết, chưa biết và yếu tố cần tìm, từ đó diễn tả lại dưới dạng ngôn ngữ toán học cho mô hình phỏng thực tiễn và tìm hướng giải quyết vấn đề toán học.

- *Bước 3. Giải bài toán thiết lập ở bước 2:* HS sẽ vận dụng những kiến thức đã học vào giải quyết vấn đề, qua đó các em rèn luyện được các kỹ năng giải toán và tìm được lời của bài toán được thiết lập ở bước 2.

- *Bước 4. Đối chiếu kết quả với thực tiễn:* Ở bước này, GV cần cho HS xác định mức độ phù hợp kết quả thu được với vấn đề thực tiễn để đưa ra kết luận cho tình huống thực tiễn, giúp HS kiểm chứng lại kiến thức đã vận dụng để chỉnh sửa nếu cần cho phù hợp với tình huống thực tiễn.

2.3. Minh họa việc vận dụng quy trình mô hình hóa toán học trong dạy học nội dung “Hệ thức lượng trong tam giác” (Toán 10)

Dưới đây, chúng tôi sẽ minh họa việc vận dụng quy trình MHHTH trong dạy học nội dung “Hệ thức lượng trong tam giác” (Toán 10) thông qua giải quyết 02 tình huống thực tiễn sau:

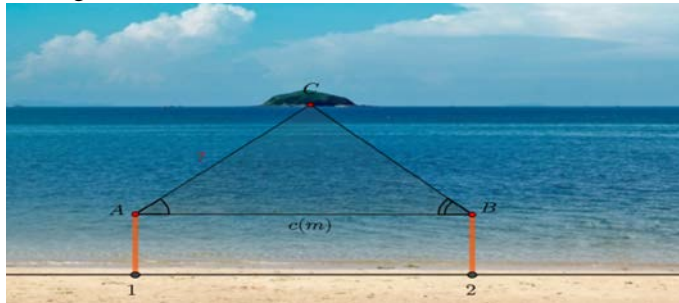
Tình huống 1: Từ bãi biển Hồng Vân - Cô Tô, một người quan sát thấy một hòn đảo nhỏ. Chỉ với những dụng cụ đơn giản, để chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí của người quan sát đến đảo. Em hãy đề xuất một cách xác định khoảng cách từ vị trí người quan sát đến đảo? (xem hình 1).



Hình 1 (nguồn: Internet, <https://phuotvivu.com/blog/hong-van-co-to-bai-bien-dep-khong-goc-chet/>)

Tiến trình hoạt động: GV chia lớp thành 10 nhóm (mỗi nhóm có 4 HS), hướng dẫn và tổ chức cho nhóm thực hiện giải quyết tình huống thực tiễn theo quy trình MHHTH đã đề xuất:

- *Bước 1. Quan sát và thu thập số liệu của tình huống thực tiễn.* GV hướng dẫn HS tìm hiểu đề bài, xác định các thông tin quan trọng, cần thiết cho quá trình xây dựng mô hình toán học. Từ tình huống và hình ảnh minh họa, GV hướng dẫn HS phác họa lại bằng hình vẽ (xem hình 2).



Hình 2

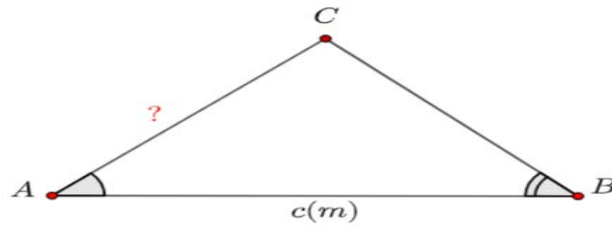
Từ hình 2, HS rút ra các thông tin quan trọng, cần thiết đó là: để đo được khoảng cách từ vị trí A của người quan sát đang đứng trên bờ biển đến vị trí C của hòn đảo, ta làm như sau: Trên bờ biển, đặt một cọc tiêu 1 tại vị trí A, và một cọc tiêu 2 tại vị trí B nào đó có thể đo được trực tiếp khoảng cách AB. Đứng ở vị trí A và B ngắm vị trí C của hòn đảo lần lượt thu được các góc đo là $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$. Khi đó, yêu cầu bài toán cần giải quyết trở thành: Tính khoảng cách của một người quan sát ở vị trí A đến điểm C, hay chính là tính độ dài đoạn AC.

- *Bước 2. Xây dựng mô hình toán học.* Dựa vào những thông tin của tình huống đã cho, GV gợi ý cho HS phát hiện ra mối liên hệ giữa các dữ liệu và đưa ra bài toán hình học như sau:

Bài toán: Cho tam giác ABC có $AB = c(m)$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$. Tính $AC = ?$

GV hướng dẫn HS vẽ hình và phân tích bài toán để tìm lời giải phù hợp. Phần hình vẽ giúp HS nhận ra mối liên hệ giữa yếu tố đã biết và yếu tố chưa biết. Cụ thể, trong tam giác ABC, yếu tố đã biết là $AB = c(m)$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ và yếu tố chưa biết là cạnh AC.

- *Bước 3. Giải bài toán thiết lập ở bước 2.* GV hướng dẫn các nhóm thảo luận, trình bày bài làm của nhóm và báo cáo kết quả. Sau đó, GV chỉnh sửa, hoàn thiện và đưa ra cách giải hoàn chỉnh (xem hình 3):



Hình 3

Trong tam giác ABC , ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. Áp dụng định lí Sin vào tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$, suy ra $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Vậy, khoảng cách giữa hai đảo là $AC = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

- *Bước 4. Đối chiếu kết quả với thực tiễn.* Trong thực tiễn: Khi đo các giá trị c, α, β chính xác thì kết quả tính toán của giá trị AC thu được sẽ càng gần với số đo được trên thực tế. Vì vậy, bài toán đưa ra là phù hợp với tình huống 1 và kết quả tìm được ở bước 3 là chấp nhận được.

Tình huống 2: Từ bãi biển trên Cù Lao Chàm (Hội An), ta có thể ngắm được một hòn đảo nhỏ trong các đảo xung quanh Cù Lao Chàm (xem hình 4). Em hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).

Hình 4 (nguồn: <https://www.klook.com/vi/blog/cu-lao-cham/>)

Tiến trình hoạt động: GV chia lớp thành các nhóm (mỗi nhóm khoảng 4-5 HS), hướng dẫn và tổ chức cho các nhóm hoạt động giải quyết tình huống thông qua quy trình MHHTH.

- *Bước 1. Quan sát và thu thập số liệu của tình huống thực tiễn.* GV hướng dẫn HS tìm hiểu đề bài, xác định các thông tin quan trọng, cần thiết cho quá trình xây dựng mô hình toán học. GV hướng dẫn HS phác họa lại tình huống (xem hình 5).



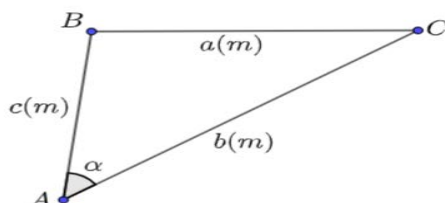
Hình 5

Từ hình 5, HS rút ra các thông tin quan trọng, cần thiết đó là: Giả sử từ một điểm A trên bãi biển Cù Lao Chàm ta nhìn thấy hòn đảo với đỉnh bên trái là B , đỉnh bên phải là C . Ngắm và đo góc $\widehat{BAC} = \alpha$. Bằng cách đo như tình huống 1 ta tính được khoảng cách $AB = c(m)$, $AC = b(m)$. Yêu cầu của tình huống thực tiễn trở thành: Tính chiều dài cạnh BC .

- *Bước 2. Xây dựng mô hình toán học.* Dựa vào những thông tin của bài toán đã cho, GV gợi ý cho HS phát hiện ra các dữ liệu và mối liên hệ giữa chúng thông qua mô hình toán học. Từ tình huống trên, ta có thể đưa về bài toán hình học như sau:

Bài toán: Cho tam giác ABC có: $AB = c(m)$, $AC = b(m)$, $\hat{A} = \alpha$. Tính chiều dài cạnh BC .

GV hướng dẫn HS vẽ hình và phân tích bài toán, tìm mối liên hệ giữa yếu tố đã biết và yếu tố chưa biết. Cụ thể: các yếu tố đã biết là $AB = c(m)$, $AC = b(m)$, $\hat{A} = \alpha$, yếu tố chưa biết là cạnh BC (xem hình 6).



Hình 6

- *Bước 3. Giải bài toán thiết lập ở bước 2.* GV hướng dẫn các nhóm thảo luận, trình bày bài làm của nhóm và báo cáo kết quả. Áp dụng định lý Cosin vào tam giác ABC , ta có: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$, hay

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$$

Vậy, bề rộng của hòn đảo là: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$.

- *Bước 4. Đối chiếu kết quả của lời giải với thực tiễn.* Trong thực tiễn, khi đo các giá trị b, c, α chính xác thì kết quả tính toán của giá trị a thu được sẽ càng gần với kết quả đo được trên thực tế. Do vậy, bài toán đưa ra là phù hợp với tình huống 2 và kết quả tìm được ở bước 3 là chấp nhận được.

3. Kết luận

Kết quả nghiên cứu của bài báo đã hệ thống hóa cơ sở lý luận và thực tiễn để xây dựng quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán ở THPT và minh họa quy trình này trong dạy học nội dung “Hệ thức lượng trong tam giác” (Toán 10) thông qua hai tình huống thực tiễn. Thông qua các bước của quy trình MHHTH nhằm phát triển cho HS khả năng tìm tòi, khám phá kiến thức, hiểu được ý nghĩa của các tri thức toán học trong thực tiễn. Để vận dụng quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán hiệu quả, GV cần vận dụng linh hoạt các bước của quy trình, chọn lọc những nội dung phù hợp nhằm giúp HS hiểu rõ mối liên hệ giữa toán học với thực tiễn, từ đó các em sẽ hứng thú, say mê học môn Toán hơn và học tập đạt kết quả cao.

Tài liệu tham khảo

- Ban Chấp hành Trung ương (2013). *Nghị quyết số 29-NQ/TW ngày 04/11/2013 về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế.*
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Edwards, D., & Hamson, M. (2001). *Guide to mathematical modelling*. Basingstoke: Palgrave.
- Greefrath, G., Carreira, S., & Stillman, G. A. (Eds.) (2023). *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling, Research from ICME-14*. Springer, Boston, MA.
- Lê Thị Hoài Châu (2014). Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh*, 65, 5-14.
- Niss, M., & Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge Publisher. London.
- Nguyen, D. N. (2016). Modelling in Vietnamese School Mathematics. *International Journal of Learning and Educational Research*, 15(6), 114-126.
- Nguyễn Danh Nam (2015). Nghiên cứu quy trình mô hình hóa trong dạy học Toán ở trường phổ thông. *Tạp chí Khoa học, Đại học Quốc gia Hà Nội*, 31(3), 1-10.
- Nguyễn Danh Nam (2020). Một số vấn đề về giáo dục toán học gắn với thực tiễn. *Tạp chí Giáo dục*, 487, 15-21.
- Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2008). *Research into the teaching and learning of applications and modelling in Australia*. In book: *Research in Mathematics Education in Australasia 2004-2007* (pp.141-164). Brill.