VJE Tạp chí Giáo dục (2024), 24(8), 23-27 ISSN: 2354-0753

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TOÁN HỌC CHO HỌC SINH THÔNG QUA DẠY HỌC GIẢI BÀI TOÁN THỰC TIỄN Ở LỚP 9

Nguyễn Ngọc Giang[1,+], Nguyễn Thị Thủy[2], Phạm Thị Thu Nga[2], Hà Như Mai[2]

[1]Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh;
[2]Trường Cao đẳng Lý Tự Trọng Thành phố Hồ Chí Minh
+ Tác giả liên hệ ● Email: giangnn@hub.edu.vn

Article history
Received: 10/01/2024
Accepted: 29/02/2024
Published: 20/4/2024

Keywords
Develop, competency of mathematical problems solving, practical problems, students

ABSTRACT
The current educational reform in our country involves strongly shifting the educational process from mainly equipping knowledge to comprehensively developing learners' competencies and qualities. According to the 2018 Mathematics General Education Curriculum, the competency to solve mathematical problems is one of the five core mathematical competencies that need to be formed and developed for high school students. The research proposes a teaching process to solve practical problems to develop mathematical problem-solving competency for students in middle school and illustrates this process through teaching Grade 9 students to solve practical problems. Teaching and solving practical problems not only help students develop the competency to solve mathematical problems but also develop the ability to apply mathematics into practice.

1. Mở đầu

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, năng lực giải quyết vấn đề toán học (GQVĐTH) là một trong 5 năng lực toán học cần hình thành và phát triển cho HS (Bộ GD-ĐT, 2018a). Do vậy, dạy học phát triển năng lực GQVĐTH đáp ứng được yêu cầu đổi mới giáo dục trong giai đoạn hiện nay, giúp HS phát triển kiến thức, năng lực và được trải nghiệm, vận dụng toán học thực tiễn. Ở Việt Nam, đã có nhiều nghiên cứu đề cập về năng lực GQVĐTH. Phan Văn Lý và Lê Thị Thanh (2023) đã xây dựng một số biện pháp phát triển năng lực GQVĐTH cho HS trong dạy học chủ đề “Hình học trực quan” ở lớp 8. Mai Thị Thanh Huyền và Đinh Thành Tuân (2023) đã đề xuất một số biện pháp phát triển năng lực GQVĐTH cho HS THPT trong dạy học chủ đề “Nguyên hàm - tích phân” (Giải tích 12). Nguyễn Ngọc Hà và Nguyễn Văn Thái Bình (2020) đề cập tới việc phát triển năng lực GQVĐTH trong dạy học giải phương trình bằng phương pháp vectơ ở THPT,... Nhìn chung, các nghiên cứu đều cho thấy việc phát triển năng lực GQVĐTH cho HS là một nhiệm vụ mang tính cấp thiết.

Bài toán thực tiễn là một dạng bài tập vận dụng trong chương trình môn Toán ở phổ thông. Các bài toán thực tiễn có nội dung thích hợp với việc người học tìm hiểu vấn đề, thiết lập mô hình toán học, lập kế hoạch và thực hiện giải pháp, cũng như nghiên cứu sâu và đánh giá vấn đề. Thông qua giải bài toán thực tiễn, HS có nhiều cơ hội phát triển năng lực, đặc biệt là năng lực GQVĐTH. Bài báo trình bày một số khái niệm về “năng lực”, “năng lực GQVĐTH”, “bài toán thực tiễn”, đề xuất quy trình dạy học giải bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực GQVĐTH cho HS THCS và minh họa quy trình này trong dạy học giải bài toán thực tiễn ở lớp 9. Kết quả nghiên cứu của bài báo đưa ra một cách thức dạy học cụ thể theo định hướng phát triển năng lực GQVĐTH cho HS đối với các bài toán thực tiễn ở THCS.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số vấn đề lí luận

- Khái niệm “năng lực”:

Theo Phạm Minh Hạc (1992), năng lực chính là một tổ hợp các đặc điểm tâm lí của một con người, tổ hợp đặc điểm này vận hành theo một mục đích nhất định tạo ra kết quả của một hoạt động nào đó. Đỗ Đức Thái và cộng sự (2018) cho rằng, năng lực là thuộc tính cá nhân, được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kĩ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí,… thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể. Theo Nguyễn Thu Hà (2014), năng lực là sự kết hợp của các khả năng, phẩm chất, thái độ của một cá nhân hoặc tổ chức để thực hiện một nhiệm vụ có hiệu quả cao. Theo Lê Ngọc Sơn và Nguyễn Dương Hoàng (2020), năng lực là khả năng làm chủ những hệ thống kiến thức, kĩ năng, thái độ và vận hành chúng một cách hợp lí để thực hiện thành công một nhiệm vụ hoặc giải quyết hiệu quả vấn đề đặt ra của cuộc sống. Theo Phan Anh Tài (2016), năng lực của mỗi người là tổ hợp đặc điểm tâm lí cá nhân thể hiện trong một hoạt động nào đó, đáp ứng yêu cầu thực hiện một nhiệm vụ đặt ra.

Trong bài báo này, chúng tôi tiếp cận khái niệm năng lực theo quan điểm của Bộ GD-ĐT (2018b), năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kĩ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí,... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt được kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể.

- *Khái niệm "năng lực giải quyết vấn đề toán học":*

Theo Niss (2003), các thành tố của năng lực GQVĐTH bao gồm: (1) Nhận biết, đề xuất, xác định các bài toán, vấn đề toán học thuần túy và ứng dụng khác nhau; các bài toán kết thúc đóng và kết thúc mở; (2) Giải được các loại bài toán toán học khác nhau (thuần túy hay ứng dụng, kết thúc đóng hay kết thúc mở), biết đề xuất bài toán mới hay đề xuất chính bài toán đó theo một cách khác. Theo Nguyễn Huy Thao và cộng sự (2024), năng lực GQVĐTH là khả năng giải quyết có hiệu quả một vấn đề toán học nào đó, dựa trên cơ sở vận dụng tri thức, kinh nghiệm và kĩ năng đã có. Theo Nguyễn Ngọc Hà và Nguyễn Văn Thái Bình (2020), năng lực GQVĐTH là tổ hợp các năng lực thể hiện ở các kĩ năng (thao tác tư duy và hành động) trong hoạt động học tập nhằm giải quyết có hiệu quả các nhiệm vụ của bài toán; theo đó, năng lực GQVĐTH là một trong những năng lực trong dạy học môn Toán có nhiều thuận lợi để phát triển cho người học thông qua việc tiếp nhận khái niệm, chứng minh các mệnh đề toán học và quá trình giải toán.

Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi, năng lực GQVĐTH là khả năng của người học có thể vận dụng những kinh nghiệm, kiến thức và kĩ năng toán học đã được trang bị để giải quyết một vấn đề toán học nào đó.

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, năng lực GQVĐTH của HS THCS gồm các thành tố tương ứng với các biểu hiện sau: (1) Nhận biết, phát hiện được vấn đề cần giải quyết bằng toán học: Phát hiện được vấn đề cần giải quyết; (2) Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề: Xác định được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề; (3) Sử dụng được các kiến thức, kĩ năng toán học tương thích (bao gồm các công cụ và thuật toán) để giải quyết vấn đề đặt ra: Sử dụng được các kiến thức, kĩ năng toán học tương thích để giải quyết vấn đề; (4) Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hóa được cho vấn đề tương tự: Giải thích được giải pháp đã thực hiện (Bộ GD-ĐT, 2018a).

- *Khái niệm "bài toán thực tiễn":* Theo Từ điển tiếng Việt, bài toán thực tiễn là bài toán đề cập về những hoạt động của con người, trước hết là lao động sản xuất, nhằm tạo ra những điều kiện cần thiết cho sự tồn tại của xã hội (Hoàng Phê và cộng sự, 1988). Theo Từ điển Oxford Advanced Learner's Dictionary, bài toán thực tiễn là bài toán bàn về những điều tồn tại hay đang xảy ra; những điều này không phải là những điều tưởng tượng (Hornby, 2005). Theo Nguyễn Thị Mỹ Hằng và cộng sự (2021): *"Bài toán thực tiễn là bài toán mà nhu cầu cần thỏa mãn được xuất phát ngay từ trong thực tiễn cuộc sống của con người"* (tr 37). Cũng theo Nguyễn Thị Mỹ Hằng và cộng sự (2021), bài toán thực tiễn có 2 dạng như sau: (1) Bài toán gắn với thực tiễn là một bài toán mà trong giả thiết hay kết luận có các nội dung liên quan đến thực tiễn cuộc sống của con người, hay nói cách khác là bài toán có bối cảnh thực; (2) Bài toán giả thực tiễn (còn gọi là bài toán mang tính thực tiễn) là bài toán đặt ra trên cơ sở giả định về một vấn đề có thể xảy ra trong thực tiễn, giả thiết hay kết luận của bài toán có một số nội dung giả định.

Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi bài toán thực tiễn là bài toán bàn về những hoạt động lao động, sản xuất của con người; với những hoạt động, lao động sản xuất này có ý nghĩa và cần được đưa ra giải pháp giải quyết.

2.2. Vai trò của bài toán thực tiễn trong dạy học phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh

Bài toán thực tiễn có vai trò quan trọng trong dạy học phát triển năng lực GQVĐTH cho HS thông qua các biểu hiện sau: (1) Bài toán thực tiễn là bài toán có chứa tình huống gợi vấn đề, HS phải huy động kinh nghiệm, trải nghiệm và kiến thức toán học để đưa ra giải pháp giải quyết vấn đề đặt ra; từ đó giúp các em khắc sâu kiến thức, nâng cao hiểu biết của mình về cuộc sống thực tiễn; (2) Trong bài toán thực tiễn, các dữ kiện, điều kiện của bài toán có thể chưa rõ ràng, khi đó, người học phải lược bỏ những điều kiện, dữ kiện không cần thiết của bài toán đó. Do vậy, khi giải bài toán thực tiễn, HS phát triển được tư duy phê phán, tư duy độc lập, có kĩ năng thu thập và xử lí thông tin để giải quyết vấn nảy sinh trong thực tiễn; (3) Thông qua hoạt động giải các bài toán thực tiễn, những kiến thức toán học trở nên sống động hơn, kích thích hứng thú, tính chủ động, sáng tạo, sự yêu thích học tập môn Toán của HS; (4) Giải bài toán thực tiễn là hoạt động nối giữa lí thuyết và thực tiễn, giúp người học hiểu rõ hơn những ứng dụng của toán học trong thực tiễn cuộc sống, từ đó các em sẽ khắc sâu và ghi nhớ được kiến thức.

Như vậy có thể thấy, giải bài toán thực tiễn là một trong những hoạt động giúp HS bồi dưỡng và phát triển được năng lực GQVĐTH. Do vậy, sử dụng bài toán thực tiễn trong dạy học môn Toán là phù hợp trong bối cảnh dạy học theo định hướng phát triển phẩm chất, năng lực cho người học hiện nay.

2.3. Quy trình dạy học giải bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trung học cơ sở

Dựa trên quan điểm của Bộ GD-ĐT (2018a) về các thành tố và biểu hiện tương ứng của năng lực GQVĐTH, nghiên cứu của Đỗ Đức Thái và cộng sự (2018), chúng tôi đưa ra quy trình dạy học giải bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực GQVĐTH cho HS THCS gồm các bước sau:

- *Bước 1. Lựa chọn bài toán thực tiễn.* Bài toán thực tiễn không nên quá khó cũng không nên quá dễ, cần tạo cơ hội cho HS nhận biết, phát hiện vấn đề cần giải quyết bằng toán học.
- *Bước 2. Phát hiện vấn đề, tìm hiểu các dữ kiện của bài toán.* Bài toán thực tiễn có thể được cho dưới dạng văn bản, chứa nhiều dữ liệu gây nhiễu (dữ liệu không phải là dữ liệu bản chất để tìm lời giải bài toán). Do vậy, GV cho HS phân tích, tìm hiểu vấn đề, xác định các dữ kiện từ giả thuyết của bài toán, loại bỏ những dữ kiện không phải bản chất. Bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS thành tố 1 của năng lực GQVĐTH.
- *Bước 3. Thiết lập mô hình toán học từ bài toán thực tiễn.* HS dựa vào các yếu tố đã cho của bài toán để đi xác định ẩn, thiết lập mô hình toán học. Bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS thành tố 1 của năng lực GQVĐTH.
- *Bước 4. Giải bài toán với mô hình toán học đã được thiết lập.* Thông qua mô hình toán học được thiết lập, GV hướng dẫn cho HS sử dụng những kiến thức, kĩ năng đã học để đề xuất cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề và lựa chọn được cách giải phù hợp. Bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS thành tố 1, 2, 3 của năng lực GQVĐTH.
- *Bước 5. Nghiên cứu sâu.* GV có thể yêu cầu HS đào sâu, tìm các cách giải khác đối với bài toán, khai thác và phát triển bài toán theo nhiều hướng khác nhau. Bên cạnh đó, GV cũng có thể đưa ra bài toán tương tự có cùng hướng giải nhưng nâng lên mức độ khó. Ở bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS cả 4 thành tố của năng lực GQVĐTH.

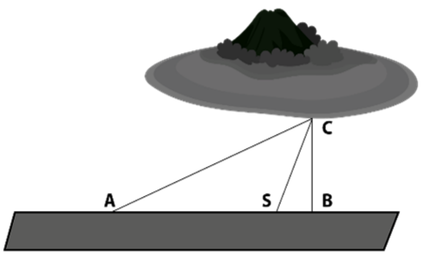
2.4. Minh họa dạy học giải bài toán thực tiễn ở lớp 9 nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh

- *Bước 1. Lựa chọn bài toán thực tiễn.* GV đưa ra bài toán thực tiễn, HS đọc kĩ đề bài và tìm hiểu nội dung bài toán. Nội dung bài toán thực tiễn như sau:

Bài toán: Một đường dây điện được nối từ nhà máy ở vị trí A đến hòn đảo C. Khoảng cách từ C đến điểm B trên đất liền là $1\ km$, khoảng cách từ B đến A là $4\ km$ (biết đường thẳng CB vuông góc với đường thẳng *AB*) (xem hình 1). Chi phí mỗi km dây điện làm dưới nước là $5000\ \$$ (nối dây điện từ đất liền ra đảo), chi phí mỗi km dây điện làm trên mặt đất là $3000\ \$$ (nối dây điện giữa hai vị trí trên đất liền). S là một điểm trên bờ nằm giữa A và B. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu km để chi phí mắc điện từ A đến S và từ S đến C có giá thành rẻ nhất?

Như vậy, có thể thấy ở bước 1, HS có nhiều cơ hội phát triển thành tố 1 của năng lực GQVĐTH.

- *Bước 2. Phát hiện vấn đề, tìm hiểu các dữ kiện của bài toán.* GV có thể hướng dẫn HS xác định các dữ kiện của bài toán thực tiễn thông qua các câu hỏi gợi ý: Bài toán cho dữ kiện gì? Cần tìm điều gì? Yếu tố nào là chưa biết? Yếu tố nào là đã biết. Dữ kiện nào nên đặt ẩn, dữ kiện nào nên loại bỏ? HS đọc kĩ đề bài và xác định được các dữ liệu đã cho: Khoảng cách từ C đến đất liền B là $CB = 1\ km$, $AB = 4km$; chi phí mỗi km dây điện làm dưới nước là $5000\ \$$ (nối dây điện từ đất liền ra đảo), chi phí mỗi km dây điện làm trên mặt đất là $3000\ \$$ (nối dây điện giữa hai vị trí trên đất liền). Dữ liệu cần tìm: Xác định vị trí của điểm S để chi phí mắc điện từ A đến S và từ S đến C có giá thành rẻ nhất (S nằm giữa *A* và *B*).



Hình 1 (nguồn: Nguyễn Ngọc Giang và cộng sự, 2020a, tr 158)

- *Bước 3: Thiết lập mô hình toán học từ bài toán thực tiễn.* GV cho HS thiết lập mô hình toán học của bài toán thực tiễn. GV đặt câu hỏi: Từ giả thiết S nằm giữa A và B, gọi $SA = x$, bài toán cần xác định điều gì? Câu trả lời mong đợi: Gọi độ dài $SA = x$ (km), $0 \le x \le 4$, suy ra $BS = 4 - x$ (km). $CS = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{(4-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$. Gọi T là chi phí lắp dây điện cần tính, khi đó T được xác định: $T = 3000\text{AS} + 5000\text{CS} = 3000x + 5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (\$). Đặt $T_{CP} = \dfrac{T}{1000} = 3x + 5\sqrt{x^2 - 8x + 17}$. GV đặt câu hỏi: Vậy để giải bài toán thực tiễn ban đầu, ta làm thế nào? Câu trả lời mong đợi của HS: Yêu cầu của bài toán thực tiễn ban đầu chính là cần tìm x sao cho biểu thức $T_{CP} = 3x + 5\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (1) đạt giá trị nhỏ nhất.

- *Bước 4: Giải bài toán với mô hình toán học đã được thiết lập.* Với mô hình toán học đã được thiết lập, GV hướng dẫn cho HS chuyển vế để làm mất dấu căn. Khi đó, ta có:

$$T_{CP} - 3x = 5\sqrt{x^2 - 8x + 17} \Leftrightarrow T_{CP}{}^2 - 6T_{CP}x + 9x^2 = 25\left(x^2 - 8x + 17\right)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + \left(6T_{CP} - 200\right)x - T_{CP}{}^2 + 425 = 0 \ (2)$$

GV gợi ý cho HS sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2. HS dễ dàng xác định được phương trình bậc (2) có nghiệm khi: $\Delta' = \left(3T_{CP} - 100\right)^2 - 16\left(425 - T_{CP}{}^2\right) = T_{CP}{}^2 - 24T_{CP} + 128 \geq 0$.

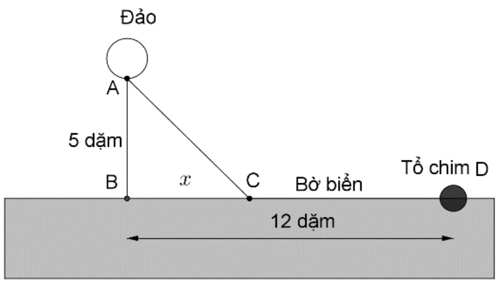
Xét $\Delta' = \left(T_{CP} - 12\right)^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \left(T_{CP} - 12\right)^2 \geq 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T_{CP} \geq 16 \\ T_{CP} \leq 8. \end{array}\right.$.

+ Nếu $T_{CP} \leq 8$, thì từ (1) ta có: $T_{CP} = 3x + 5\sqrt{x^2 - 8x + 17} \leq 8 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 - 8x + 17} \leq 8 - 3x$ (3). Vì $5\sqrt{x^2 - 8x + 17} = 5\sqrt{(x-4)^2 + 1} > 0 \Rightarrow 8 - 3x > 0 \Rightarrow x < \dfrac{8}{3}$. Với $x < \dfrac{8}{3}$, bình phương hai vế của bất phương trình (3), ta có: $25(x^2 - 8x + 17) \leq (8 - 3x)^2 = 64 - 48x + 9x^2 \Rightarrow 16x^2 - 152x + 361 \leq 0 \Leftrightarrow (4x - 19)^2 \leq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \dfrac{19}{4} > \dfrac{8}{3}$, vô lí. Vậy, không xảy ra trường hợp $T_{CP} \leq 8$, hay $T_{CP} \geq 16$.

+ Vì $T_{CP} = \dfrac{T}{1000}$ nên T nhỏ nhất khi và chỉ khi T_{CP} nhỏ nhất. Với $T_{CP} \geq 16$ thì giá trị nhỏ nhất của T_{CP} là 16. Thay $T_{CP} = 16$ vào phương trình (2), giải được nghiệm $x = 3,25$. Hay điểm S trên bờ cách điểm A là $3,25\,km$, thỏa mãn các dữ kiện của bài toán. Như vậy, có thể thấy ở bước 4, HS đã sử dụng các kiến thức, kĩ năng toán học tương thích để tính chi phí mắc điện từ A đến S và từ S đến C có giá thành rẻ nhất. Từ đó, giúp HS có thể phát triển các thành tố 1, 2 và 3 của năng lực GQVĐTH.

- *Bước 5. Nghiên cứu sâu vấn đề toán học.* Đối với bước này, GV có thể khắc sâu kiến thức cho HS thông qua việc đưa ra bài toán tương tự hay bài toán khái quát hóa để củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng giải toán.

Bài toán tương tự (bài toán năng suất - năng lượng): Các nhà nghiên cứu về côn trùng học đã xác định rằng, do hơi nước thường bốc lên và rơi trở lại vào ban ngày nên một số loài chim có xu hướng tránh các chuyến bay quá dài qua các vùng nước vào thời điểm ban ngày này. Vì lí do trên, nên chim bay trên mặt nước cần nhiều năng lượng hơn. Một con chim được thả từ điểm A trên một hòn đảo, cách B là 5 dặm (B là điểm gần nhất của điểm A nằm trên đường bờ biển) (xem hình 2). Con chim bay đến một điểm C trên đường bờ biển và sau đó bay dọc theo đường bờ biển đến khu vực làm tổ của nó là vị trí D. Biết các thông số được cho như hình 2. Giả sử con chim có 170 $kcal$ năng lượng dự trữ, nó sử dụng 10 kcal/dặm để bay trên cạn và 14 kcal/dặm để bay trên mặt nước.



Hình 2 (nguồn: Nguyễn Ngọc Giang và cộng sự, 2020b, tr 108)

a) Điểm C nên đặt ở đâu để con chim sử dụng đúng 170 $kcal$ năng lượng trong toàn bộ chuyến bay của nó?

b) Con chim có đủ năng lượng dự trữ để bay thẳng từ A đến D hay không? Vì sao?

Tương tự với bài toán ban đầu, HS đặt $BC = x \Rightarrow CD = 12 - x$. Sử dụng định lí Pythagoras để rút ra được hàm số biểu thị tổng khoảng cách $AC + CD$. Hoạt động nghiên cứu sâu đòi hỏi việc nhận biết, lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải bài toán tương tự; sử dụng được các kiến thức, kĩ năng toán học tương thích để giải bài toán. Do vậy, ở bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS cả 4 thành tố của năng lực GQVĐTH.

3. Kết luận

Phát triển năng lực GQVĐTH là một trong những định hướng dạy học đang được chú trọng trong giai đoạn hiện nay. Bài báo đã đề xuất quy trình dạy học giải bài toán thực tiễn ở THCS nhằm phát triển năng lực GQVĐTH cho HS và minh họa quy trình này thông qua dạy học giải bài toán thực tiễn ở lớp 9. Trong quá trình dạy học giải các bài toán thực tiễn, GV cần vận dụng linh hoạt quy trình giải toán nhằm giúp HS tiếp cận với vấn đề thực tiễn theo các cách khác nhau, phát hiện được vấn đề cần giải quyết và xác định được cách thức giải quyết vấn đề, từ đó hiểu được những ứng dụng của toán học trong thực tiễn.

Tài liệu tham khảo

Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

Bộ GD-ĐT (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

Đỗ Đức Thái (chủ biên), Lê Tuấn Anh, Đỗ Đức Bình, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Phạm Sỹ Nam, Vũ Phương Thúy (2018). *Dạy học phát triển năng lực môn Toán trung học cơ sở*. NXB Đại học Sư phạm.

Hoàng Phê, Bùi Khắc Việt, Chu Bích Thu, Đào Thản, Hoàng Tuệ, Hoàng Văn Hành, Lê Kim Chi, Nguyễn Minh Châu, Nguyễn Ngọc Trâm, Nguyễn Thanh Nga, Nguyễn Thúy Khanh, Nguyễn Văn Khang, Phạm Hùng Việt, Trần Cẩm Vân, Trần Nghĩa Phương, Vũ Ngọc Bảo, Vương Lộc (1988). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Khoa học Xã hội.

Hornby, A. S. (2005). *Oxford Advanced Learner's Dictionary*. Oxford University Press.

Lê Ngọc Sơn, Nguyễn Dương Hoàng (2020). *Một số vấn đề về lí luận và thực hành dạy học môn Toán*. NXB Giáo dục Việt Nam.

Mai Thị Thanh Huyền, Đinh Thành Tuân (2022). Một số biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trung học phổ thông trong dạy học chủ đề "Nguyên hàm - Tích phân" (Giải tích 12). *Tạp chí Giáo dục*, *22*(22), 1-6.

Nguyễn Huy Thao, Nguyễn Ngọc Giang, Phạm Huyền Trang, Nguyễn Thị Nga, Dương Minh Tới (2024). Dạy học ứng dụng "Định lí Sin" vào giải các bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, *24*(3), 19-23.

Nguyễn Ngọc Giang, Nguyễn Thế Sơn, Nguyễn Viết Dương, Nguyễn Thị Ngọc Thắm (2020b). *Đường vào toán thực tế trung học phổ thông - tập 2 (Giải tích)*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Nguyễn Ngọc Giang, Trương Quang Duy Thịnh, Dương Hoàng Bích Thuận, Nguyễn Viết Dương, Phạm Thị Hồng Hạnh (2020a). *Chuyên đề bồi dưỡng Toán thực tế lớp 9*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Nguyễn Ngọc Hà, Nguyễn Văn Thái Bình (2020). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học trong dạy học giải phương trình bằng phương pháp vectơ ở trường trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt kì 1 tháng 5*, 98-104.

Nguyễn Thị Mỹ Hằng, Vũ Văn Quyết, Lê Văn Thành (2021). Thiết kế bài toán thực tiễn trong dạy học toán cho các lớp cuối cấp trung học cơ sở. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Vinh*, *50*(1B), 36-46.

Nguyễn Thu Hà (2014). Giảng dạy theo năng lực và đánh giá theo năng lực trong giáo dục: Một số vấn đề lí luận cơ bản. *Tạp chí Khoa học, Đại học Quốc gia Hà Nội: Nghiên cứu Giáo dục*, *30*(2), 56-64.

Niss, M. A. (2003). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project*. In A. Gagatsis, & S. Papastavridis (Eds.), 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, Hellas 3-4-5 January 2003 (pp. 116-124). Hellenic Mathematical Society.

Phạm Minh Hạc (1992). *Một số vấn đề tâm lí học*. NXB Giáo dục.

Phan Anh Tài (2016). *Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề của học sinh trong dạy học Toán trung học phổ thông, Một số vấn đề lí luận và thực tiễn*. NXB Giáo dục Việt Nam.

Phan Văn Lý, Lê Thị Thanh (2023). Một số biện pháp phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề "Hình học trực quan" (Toán 8). *Tạp chí Giáo dục*, *23*(số đặc biệt 7), 34-38.