KẾT NỐI TOÁN HỌC GIỮA ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN TRONG DẠY HỌC GIẢI QUYẾT CÁC VẤN ĐỀ THỰC TẾ

Nguyễn Thị Tân An[1,+], Lê Văn Vũ[2]

[1]Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế;
[2]Trường THPT Hai Bà Trưng, thành phố Huế, tỉnh Thừa Thiên Huế
+ Tác giả liên hệ ● Email: tanan0704@gmail.com

Article history
Received: 10/3/2024
Accepted: 29/3/2024
Published: 20/5/2024

Keywords
Derivatives, integrals, mathematical connections, practical problems

ABSTRACT
In teaching Mathematics, students need to develop the ability to connect mathematics to understand mathematics, especially with abstract mathematical concepts such as derivatives and integrals. Through modeling real-life situations, students can connect mathematics to reality, as well as connect mathematical knowledge with each other. This study uses experimental methods to verify the effects of lesson plans on students' ability to make mathematical connections between derivatives and integrals in teaching real-life problem solving. The research was conducted on 42 students of class 12A2, Hai Ba Trung High School, Hue City in the first semester of the 2023-2024 school year. The results of the initial research show that teaching integral content by focusing on the mathematical connection between derivatives and integrals through solving different real-life situations helped the students improve their ability to make mathematical connections between derivatives and integrals, as well as between mathematics and reality.

1. Mở đầu

Ở các lớp dưới, HS đã được học các phép toán ngược nhau như phép cộng và phép trừ, phép nhân và phép chia, phép toán lũy thừa và phép khai căn. Đến lớp 11 và 12, HS tiếp tục được làm quen với hai phép toán ngược nhau là đạo hàm và tích phân. Khác với các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa hay khai căn thường chỉ liên quan đến những yếu tố "tĩnh"; đối với hai khái niệm "đạo hàm", "tích phân" lại thường đề cập đến những yếu tố "động", được thấy rõ ở những tình huống thực tế liên quan đến tốc độ, chẳng hạn như: tốc độ tăng trưởng GDP bình quân đầu người, tốc độ nhiễm bệnh, vận tốc tức thời,... Qua đó, HS thấy được ứng dụng của đạo hàm, tích phân trong việc giải quyết các vấn đề thực tế. Tuy nhiên, "tích phân" vẫn là một khái niệm khá trừu tượng đối với HS lớp 12. HS thường chỉ biết áp dụng công thức, phương pháp tính, các tính chất của tích phân để giải các bài toán theo quy trình, các bài toán tính toán quen thuộc nên khi gặp các tình huống thực tế, HS thường lúng túng, thiếu khả năng kết nối toán học (KNTH), không biết phân tích dữ liệu đã cho và vận dụng kiến thức đã học vào giải quyết vấn đề thực tế.

Các KNTH cho phép toán học được nhìn nhận như một môn học có tính thực tế. Vì vậy, HS cần được phát triển khả năng KNTH (Berry & Nyman, 2003). Các nghiên cứu về KNTH hiện tại chủ yếu khám phá kết nối giữa các kiểu biểu diễn, kết nối trong quá trình giải quyết các nhiệm vụ cụ thể, kết nối trong giải quyết vấn đề và kết nối trong mô hình hóa các vấn đề thực tế (Garcia-Garcia & Dolores-Flores, 2017). Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một kết quả nghiên cứu về khả năng KNTH của HS lớp 12 giữa hai khái niệm cơ bản trong Giải tích, đó là "đạo hàm" và "tích phân" trong quá trình giải quyết các vấn đề thực tế.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số vấn đề lí luận

2.1.1. Hiểu toán và kết nối toán học

"Hiểu toán" là khả năng kết nối các biểu diễn, ý tưởng, quy trình hoặc sự kiện toán học với mạng kiến thức toán học hiện có của mỗi người (Hiebert & Carpenter, 1992). "KNTH" là quá trình nhận thức mà qua đó người học liên kết hai hoặc nhiều ý tưởng, khái niệm, định nghĩa, định lí, quy trình, cách biểu diễn và ý nghĩa với nhau, với các môn học khác hoặc với đời sống thực tế (Garcia-Garcia & Dolores-Flores, 2017). Các KNTH xuất hiện khi HS giải quyết nhiệm vụ cụ thể và được thể hiện thông qua hình thức nói hoặc viết; được tạo ra với trong cuộc sống hằng ngày, với các kiến thức đã học, bối cảnh trong và ngoài trường học, các chủ đề toán học khác nhau,… (Leinwand, 2014). HS có thể kết nối các chủ đề toán học (kết nối trong nội bộ toán học) và tạo sự kết nối giữa môn Toán với môn học khác, hoặc với cuộc sống thực tế (các kết nối ngoài toán học). Mức độ hiểu toán được xác định bởi số lượng và hiệu quả của các KNTH. Khi HS có các KNTH tốt sẽ giúp các em có sự hiểu toán sâu sắc.

Hiểu toán vừa là quá trình vừa là kết quả của hành động, đồng thời là sự hiện thực hóa các kết nối và là kết quả của các kết nối đó (Cai & Ding, 2015). Quá trình này diễn ra tự động và liên tục, mục đích là để đạt được sự hiểu biết sâu sắc về toán học. Có thể nói, KNTH là kết quả của việc hiểu toán, nhưng hiểu toán cũng có thể là hành động để tạo ra các KNTH. Hiểu toán và KNTH có mối liên hệ chặt chẽ với nhau, không có sự kết nối nếu không hiểu toán và ngược lại. Các KNTH cần được xây dựng dựa trên cơ sở toán học; thông qua quá trình tư duy, các KNTH giúp HS: (1) Có thể sử dụng kiến thức toán học trong các tình huống khác nhau (Stylianides, 2007); (2) Hiểu toán giúp người học dễ tiếp cận các tình huống mới hơn vì các kết nối sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho việc chuyển đổi kiến thức (NCTM, 2000); (3) Hiểu toán có thể giúp người học ghi nhớ dễ dàng hơn và thậm chí là không cần nhớ nếu người đó hiểu ý tưởng toán học (Walle, 2007); (4) Ngoài ra, hiểu toán tạo động lực cho HS trong việc học Toán, cải thiện thái độ và niềm tin về việc học Toán. Đồng thời sự KNTH với các vấn đề thực tế giúp HS thấy rằng, toán học là hữu ích (Hiebert & Wearne, 2004).

Garcia-Garcia và Dolores-Flores (2017) đã chỉ ra đặc điểm của KNTH như sau: (1) Các KNTH là những mối quan hệ thực sự hữu ích trong việc nâng cao việc hiểu toán; (2) Sử dụng các KNTH sẽ dẫn đến những câu trả lời nhất quán trong toán học; (3) Sử dụng các cách biểu diễn khác nhau là một phần quan trọng trong việc tạo KNTH; (4) Các mối quan hệ logic như "bao hàm" và "khái quát hóa" là một phần của việc tạo ra các KNTH; (5) Việc mô hình hóa các tình huống thực tế cũng là một dạng KNTH.

2.1.2. Mô hình hóa toán học giúp kết nối toán học với thực tế

Mô hình hóa toán học (MHHTH) là quá trình cho phép giải quyết các vấn đề trong thế giới thực với sự trợ giúp của toán học (Blum et al., 2007). Hiện nay, có rất nhiều định nghĩa và mô tả về khái niệm MHHTH trong lĩnh vực giáo dục toán học, tùy thuộc vào quan điểm lí thuyết mà mỗi tác giả lựa chọn. Tuy nhiên, các mô tả đều thể hiện sự kết nối giữa toán học với thế giới thực, toán học được sử dụng để giải thích các hiện tượng trong thế giới thực, đưa ra dự đoán về hành vi tương lai của một hệ thống trong thế giới thực, quá trình này đòi hỏi sự sáng tạo và đưa ra những lựa chọn, giả thiết và quyết định, đó là một quá trình lặp đi lặp lại, có thể có nhiều cách tiếp cận và câu trả lời.

Quá trình MHHTH thường gồm 4 bước chính: (1) Toán học hóa (xây dựng mô hình toán): nhận ra các đối tượng, quan hệ toán học và biểu diễn vấn đề đặt ra trong thế giới thực dưới dạng toán học; (2) Giải các bài toán toán học: sử dụng phương pháp và công cụ toán học phù hợp để đi đến các kết quả toán học, liên quan đến câu hỏi phát sinh từ vấn đề trong thế giới thực; (3) Giải thích kết quả: Các kết quả toán học được giải thích gắn với bối cảnh của vấn đề trong thế giới thực; (4) Kiểm tra, đánh giá kết quả có hợp lí và tương thích với thông tin được đưa ra trong tình huống ban đầu hay không, đồng thời kiểm tra các mô hình, giải pháp có phù hợp và hữu ích với mục đích đặt ra. Điều này có thể dẫn đến một sự cải tiến trong mô hình cũng như lời giải, hoặc tạo ra một chu trình mới nếu cần thiết.

Tùy thuộc vào cách chúng ta xem MHHTH là mục tiêu hay phương tiện của việc dạy học mà có hai cách tiếp cận khác nhau: (1) MHHTH có thể đóng vai trò là *phương tiện* để tạo điều kiện thuận lợi và hỗ trợ quá trình học tập môn Toán, phát triển việc hiểu toán của HS. Thông qua MHHTH, người học khám phá các khái niệm và quá trình toán học, phát triển các phỏng đoán và biện minh. Tiếp cận này tập trung vào việc hình thành kiến thức toán học trong chương trình dựa trên giải quyết các vấn đề thực tế. Sử dụng MHHTH trong dạy học Toán có thể giúp HS thấy rằng toán học được sử dụng bên ngoài lớp học Toán với nhiều lí do và mục đích khác nhau, từ đó tạo ra sự đa dạng về bản chất và vai trò của toán học trong thế giới thực, đồng thời cung cấp ý nghĩa, giải thích cho các đối tượng và hoạt động toán học, cung cấp động lực học tập môn Toán cho HS; (2) MHHTH đóng vai trò là một trong những *mục tiêu* của việc học Toán, đó là phát triển năng lực MHHTH hay khả năng áp dụng kiến thức đã học vào giải quyết các vấn đề thực tế (Julie & Mudaly, 2007).

Nhiều bằng chứng từ thực tiễn và nghiên cứu cho thấy, không có sự tự động chuyển đổi từ việc học tốt phần lí thuyết toán học sẽ có khả năng áp dụng toán học vào các tình huống thực tế. Để phát triển cho HS năng lực MHHTH thì hoạt động MHHTH phải được đưa vào chương trình dạy học môn Toán nhằm giúp HS KNTH và thực tế (Niss & Blum, 2020).

2.2. Nghiên cứu dạy học thực nghiệm tại Trường Trung học phổ thông Hai Bà Trưng, thành phố Huế, tỉnh Thừa Thiên Huế

2.2.1. Phương pháp và đối tượng nghiên cứu

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp thực nghiệm để kiểm chứng hiệu quả tác động của kế hoạch bài dạy lên khả năng KNTH giữa đạo hàm và tích phân của HS khi giải quyết các vấn đề thực tế. Nghiên cứu được thực hiện trên 42 HS lớp 12A2, Trường THPT Hai Bà Trưng, TP. Huế, tỉnh Thừa Thiên Huế vào học kì 1, năm học 2023-2024. Lớp 12A2 là lớp theo khối A, với chất lượng học tập tương đối đồng đều. Tại thời điểm thực nghiệm, HS đã được học kiến thức toán học về Giới hạn của hàm số và chưa học khái niệm tích phân.

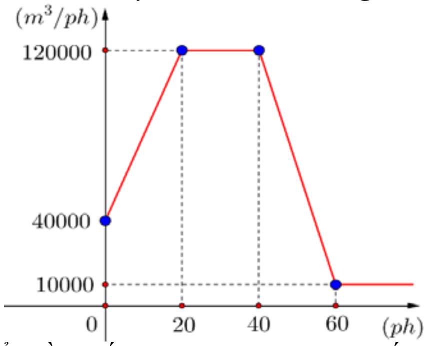
Quá trình dạy học thực nghiệm gồm 4 tiết. Với 02 tiết đầu, GV sẽ dạy bài "Tích phân" theo hướng chú trọng đến KNTH giữa đạo hàm và tích phân thông qua các tình huống thực tế. Trong 2 tiết dạy này, chúng tôi đã sử dụng 7 tình huống thực tế liên quan đến các KNTH như sau: (1) Ôn lại kiến thức đã học, kết nối giữa quãng đường $s(t)$ với vận tốc $v(t)$ là $s'(t)=v(t)$; (2) Hình thành khái niệm tích phân: KNTH giữa thể tích nước $V(t)$ và vận tốc nước chảy $v(t)$ là $V(t)=\int v(t)dt=F(t)+C$; (3) Hình thành khái niệm tích phân: KNTH giữa chi phí biên $C_M(x)$ và chi phí để sản xuất thêm x sản phẩm $C(x)$ là $C(x)=\int C_M(x)dx$; (4) Nêu ví dụ: KNTH giữa quãng đường $s(t)$ với vận tốc $v(t)$ là $s(t)=\int v(t)dt$; (5) Luyện tập: KNTH giữa số lượng vi khuẩn $F(t)$ của ngày thứ t kể từ ngày đầu tiên và tốc độ sinh sản $f(t)$ của loại vi khuẩn, đó là $F'(t)=f(t)$, suy ra $F(t)=\int f(t)dt$; (6) Luyện tập: KNTH giữa thể tích nước $V(t)$ và vận tốc nước chảy $v(t)$ là $V(t)=\int v(t)dt=F(t)+C$; (7) Bài tập về nhà: KNTH giữa vận tốc $v(t)$ và gia tốc $a(t)$ là $v(t)=\int a(t)dt$. Quá trình giải quyết 7 tình huống này tập trung vào 4 bước của quá trình MHHTH đã đề cập ở trên: xây dựng mô hình toán, giải bài toán toán học, chuyển đổi kết quả toán sang bối cảnh thực tế và kiểm tra, đánh giá.

02 tiết còn lại: HS làm bài kiểm tra thực nghiệm theo nhóm (mỗi nhóm 5-6 HS). Đề kiểm tra gồm 4 tình huống cần giải quyết như sau:

Tình huống 1: Trong một đợt mưa lớn kéo dài, để đảm bảo an toàn hồ đập và phòng chống thiên tai, nhà máy thủy điện Hòa Bình lập kế hoạch xả lũ với dự kiến thời gian xả từ 14h00 đến 15h00 cùng ngày. Tốc độ lưu lượng nước dự kiến xả được cho bởi biểu đồ 1, trong đó chọn mốc thời gian t = 0 lúc 14h00. Biết rằng, sau khi kết thúc việc xả lũ thì nhà máy sẽ vận hành xả nước vừa đủ để phục vụ việc sản xuất điện.

a) Xác định hàm số v(t) biểu diễn tốc độ lưu lượng nước dự kiến xả theo thời gian t (phút) từ thời điểm 14h00 đến 15h00.

b) Tính tổng lượng nước dự kiến xả của hồ thủy điện Hòa Bình trong khoảng thời gian từ 14h00 đến 15h00.



Biểu đồ 1. Tốc độ lưu lượng nước dự kiến xả được

Tình huống 2: Một tài xế lái xe ô tô di chuyển trên đường khi trời mưa lớn. Vì đường trơn và tầm nhìn bị hạn chế nên để đảm bảo an toàn, tài xế lái xe với vận tốc từ 30km/h đến 40km/h; đồng thời khi hãm phanh, để tránh việc xe bị trơn trượt, tài xế này thường hãm phanh từ từ để xe di chuyển chậm dần đều cho đến khi dừng hẳn. Theo kinh nghiệm của tài xế, nếu xe đang di chuyển với vận tốc như trên thì sau 5 giây kể từ khi hãm phanh xe sẽ dừng hẳn. Hỏi nếu lúc đó ô tô đang di chuyển với vận tốc 36km/h thì khoảng cách an toàn tối thiểu giữa ô tô với các phương tiện giao thông phía trước là bao nhiêu mét?

Tình huống 3: Sau khi kết thúc một đợt dịch bệnh, các chuyên gia y tế nghiên cứu và cho ra kết quả ước tính tốc độ nhiễm bệnh (người/ngày) tại thời điểm ngày thứ t kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên được xác định bởi hàm số bậc hai có dạng $v(t)=a.t^2+b.t$ $(a,b\in\mathbb{R},\ t\geq 0)$. *Theo thống kê, số ca nhiễm bệnh tính đến ngày thứ 30 là 62100 người và từ ngày thứ 66 trở đi thì không có thêm ca nhiễm mới. Hỏi có tất cả bao nhiêu người đã bị nhiễm bệnh trong đợt dịch này?*

Tình huống 4: Vào năm 2021, GDP bình quân đầu người của một quốc gia là khoảng 3700 USD. Dựa theo bản quy hoạch về kinh tế thời kì 2021-2030, tầm nhìn đến năm 2050 của quốc gia đó, người ta dự đoán tốc độ tăng trưởng GDP bình quân đầu người sau $x(x \geq 0)$ *năm kể từ năm 2021 được xác định theo công thức* $v(x) = 3700.1,07^x.\ln 1,07$ *(GDP/năm).*

a) Tính GDP bình quân đầu người của quốc gia đó vào năm 2030 (theo đơn vị USD và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

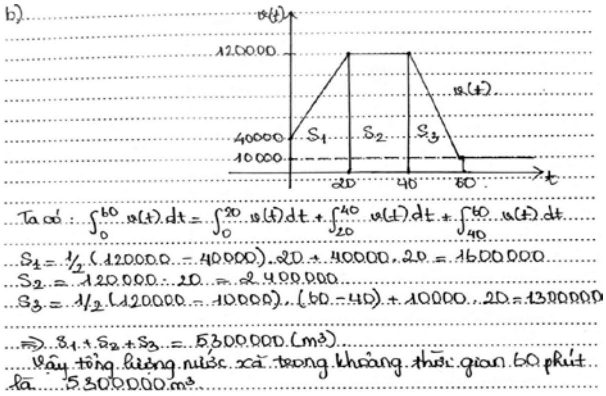
b) Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, kể từ năm 2021, GDP bình quân đầu người của quốc gia đó vượt quá 10000 USD.

Công cụ nghiên cứu là 4 tình huống thực tế ở đề kiểm tra được thiết kế theo tiêu chí: HS cần có sự kết nối giữa toán học với thực tế, giữa kiến thức đạo hàm và tích phân để toán học hóa tình huống, giải quyết mô hình toán học tương ứng.

Phân tích dữ liệu: Để phân tích dữ liệu, chúng tôi sử dụng phương pháp phân tích định lượng và định tính. Dữ liệu định lượng là kết quả đánh giá câu trả lời của HS cho các tình huống. Mỗi câu trả lời được đánh giá theo 4 tiêu chí: xây dựng mô hình toán học, xác định được mối liên hệ giữa đạo hàm và tích phân tương ứng với tình huống, giải bài toán và trả lời cho tình huống. Mỗi tiêu chí có mức điểm từ 0,5-1,0, tùy thuộc vào mức độ phức tạp khi toán học hóa tình huống, điểm của mỗi tình huống là 2,5. Tiếp theo, chúng tôi tính tổng điểm của mỗi tiêu chí và đánh giá khả năng KNTH và thực tế, kết nối giữa đạo hàm và tích phân của các nhóm. Dữ liệu định tính được thu thập thông qua việc phân tích các giải thích của HS, tập trung vào hai loại kết nối trên.

2.2.2. Kết quả nghiên cứu thực nghiệm

Đối với tình huống 1, tất cả các nhóm đều kết nối được kiến thức toán học với thực tế, cụ thể hàm số biểu diễn tốc độ chảy của nước $v(t)$ chính là đạo hàm của hàm số $V(t)$ biểu diễn tổng lượng nước xả theo thời gian. Vì vậy, tích phân của hàm số tốc độ chảy của nước trong khoảng thời gian nào đó chính bằng tổng lượng nước trong khoảng thời gian tương ứng. Từ đó, tính được tổng lượng nước dự kiến xả của hồ thủy điện Hòa Bình trong khoảng thời gian từ 14h00 đến 15h00 là: $V(60) - V(0) = \int_0^{60} v(t)\,dt$, do tình huống đã chọn mốc thời gian $t = 0$ lúc 14h00. Có một nhóm HS (xem hình 1) giải bài toán theo cách tính tổng diện tích các hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $v(t)$ với trục thời gian từ thời điểm $t = 0$ (lúc 14h00) đến thời điểm $t = 60$ (lúc 15h00 cùng ngày). Mặc dù các nhóm đã kết nối được toán học và thực tế, giữa đạo hàm và tích phân nhưng chỉ có 5 nhóm giải đúng hoàn toàn, 1 nhóm giải sai và 2 nhóm thiếu lập luận trong quá trình giải.

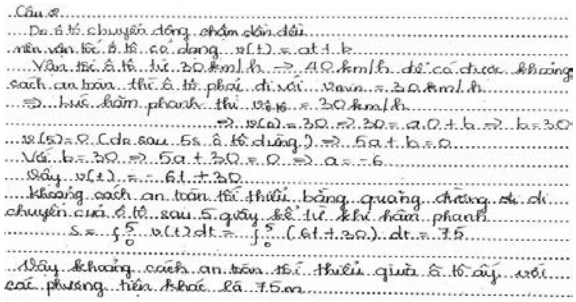


Hình 1

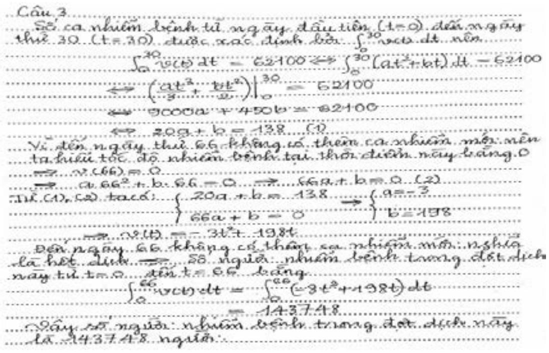
Ở tình huống 2, HS cần thực hiện ba KNTH: (2.1) Khoảng cách an toàn tối thiểu giữa ô tô với các phương tiện giao thông phía trước chính bằng quãng đường di chuyển sau 5 giây kể từ khi ô tô hãm phanh đến lúc dừng hẳn; (2.2) Phương trình vận tốc chuyển động chậm dần đều là $v(t) = a.t + b \ (a < 0)$. Vận tốc lúc bắt đầu hãm phanh là $36\,km/h = 10\,m/s$ nên $v(0) = 10$, sau 5 giây thì ô tô dừng hẳn nên $v(5) = 0$. Giải hệ ta sẽ có $v(t) = -2.t + 10 \ (m/s)$; (2.3) Hàm số biểu diễn vận tốc $v(t)$ của ô tô chính là đạo hàm của hàm số $s(t)$ biểu diễn quãng đường của ô tô theo thời gian (từ lúc hãm phanh đến lúc dừng hẳn). Ngược lại, tích phân của hàm số vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian nào đó chính bằng quãng đường ô tô di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

Cả 8/8 nhóm đều thực hiện tốt kết nối 2.1 và 2.3, trong đó có 02 nhóm không trình bày tường minh kết nối 2.1 trong bài làm của mình. Có 6/8 nhóm thực hiện tốt kết nối 2.2. Nhóm 1 thực hiện kết nối 2.2 nhưng bị sai lầm trong tính toán, xác định sai $v(t)$ vì cho rằng vận tốc ô tô lúc hãm phanh là $30\,km/h$ chứ không phải $36\,km/h$ (xem hình 2), nhóm 5 làm sai do không đổi đơn vị vận tốc.

Đối với tình huống 3, HS cần thực hiện 3 kết nối sau: (3.1) Đến ngày thứ 66 trở đi thì không có thêm ca nhiễm mới, nghĩa là $v(66) = 0$; (3.2) Hàm số biểu diễn tốc độ nhiễm bệnh $v(t)$ (người/ngày) chính là đạo hàm của hàm số $f(t)$ biểu diễn số ca nhiễm bệnh tại thời điểm ngày thứ t. Ngược lại, tích phân của hàm số tốc độ nhiễm bệnh $v(t)$ trong một khoảng thời gian chính bằng số ca nhiễm bệnh trong khoảng thời gian đó; (3.3) Số ca nhiễm bệnh tính đến ngày thứ 30 là 62100 người, được xác định bởi $\int_0^{30} v(t)dt = 62100$. Mặc dù tình huống 3 đưa ra là không quen thuộc đối với HS, nhưng cả 8 nhóm đều đã nhận ra 3 kết nối trên, trong đó có 3 nhóm giải quyết tốt tình huống đặt ra, 5 nhóm còn lại lập luận không tường minh kết nối 2. Hình 3 là bài làm minh họa của một nhóm giải quyết đúng đối với tình huống này.

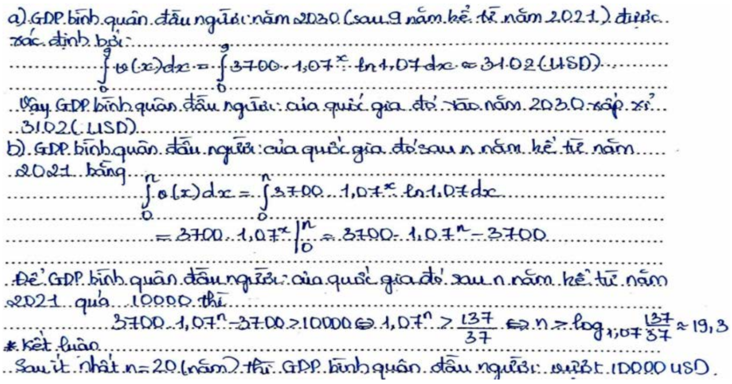


Hình 2



Hình 3

Trong tình huống 4, HS cần thực hiện ba kết nối sau: (4.1) Hàm số biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP bình quân đầu người $v(x)$ (USD/năm) chính là đạo hàm của hàm số $f(x)$ biểu diễn GDP bình quân đầu người tăng thêm sau x năm kể từ năm 2021. Ngược lại, tích phân của hàm số tốc độ tăng trưởng GDP bình quân đầu người $v(x)$ trong khoảng thời gian nào đó chính bằng GDP bình quân đầu người tăng thêm trong khoảng thời gian đó; (4.2) GDP bình quân đầu người của quốc gia đó vào năm 2030, tức là sau $n = 9$ (năm) được tính bởi $3700 + \int_0^n v(x)dx$; (3) GDP bình quân đầu người của quốc gia đó sau n $(n \geq 0)$ năm kể từ năm 2021 được tính bởi $3700 + \int_0^n v(x)dx$. Tuy nhiên, kết nối 4.2 và 4.3 là tương tự nhau nên khi HS thực hiện đúng kết nối 4.2 thì cũng có khả năng thực hiện đúng kết nối 4.3. Khi giải quyết tình huống, có 3/8 nhóm thực hiện tốt 3 kết nối và giải quyết đúng. Có 4 nhóm bị nhầm lẫn giữa GDP bình quân đầu người tăng thêm và GDP bình quân đầu người sau n năm, tức là không cộng giá trị GDP bình quân đầu người của quốc gia đó vào năm 2021, nên sai cả 3 kết nối (xem hình 4). Lỗi này là do HS đọc không kĩ đề mặc dù các em cũng đã nhận ra kết nối giữa đạo hàm và tích phân trong tình huống này. Một nhóm chỉ dừng lại ở bước giải được n mà không chuyển đổi kết quả toán này sang câu trả lời trong thực tế.


a) GDP bình quân đầu người năm 2030 (sau 9 năm kể từ năm 2021) được xác định bởi

$\int_0^9 v(x)dx = \int_0^9 3700 \cdot 1,07^x \cdot \ln 1,07 dx \approx 3102$ (USD)

Vậy GDP bình quân đầu người của quốc gia đó vào năm 2030 xấp xỉ 3102 (USD)

b) GDP bình quân đầu người của quốc gia đó sau n năm kể từ năm 2021 bằng

$\int_0^n v(x)dx = \int_0^n 3700 \cdot 1,07^x \ln 1,07 dx$

$= 3700 \cdot 1,07^x \Big|_0^n = 3700 \cdot 1,07^n - 3700$

Để GDP bình quân đầu người của quốc gia đó sau n năm kể từ năm 2021 quá 10000 thì

$3700 \cdot 1,07^n - 3700 \geq 10000 \Leftrightarrow 1,07^n \geq \frac{137}{37} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,07}\frac{137}{37} \approx 19,3$

* Kết luận

Sau ít nhất n = 20 (năm) thì GDP bình quân đầu người vượt 10000 USD.

Hình 4

Theo kết quả chấm điểm bài làm của các nhóm tham gia thực nghiệm, có 5 nhóm đạt mức điểm 8 trở lên (trên điểm tổng là 10 điểm), 3 nhóm còn lại đạt mức điểm từ 6 đến 7,5. Điều đó cho thấy, HS đã thực hiện được tốt các kết nối giữa đạo hàm và tích phân trong 4 tình huống thực tế đưa ra. Ngoài ra, ở tình huống 1 và 2, HS đạt điểm cao hơn so với tình huống 3 và 4. Điều này có thể giải thích được là do bối cảnh thực tế trong tình huống 1 và tình huống 2 (chứa KNTH giữa thể tích nước và vận tốc nước chảy, giữa quãng đường với vận tốc của chuyển động) là khá quen thuộc với HS. Dù bối cảnh ở tình huống 3 và 4 là không quen thuộc với HS, các em vẫn nhận ra được các KNTH liên quan, nhưng một số nhóm gặp khó khăn trong việc thể hiện tường minh các kết nối này, cũng như thiếu các lập luận cụ thể để trình bày các kết nối.

3. Kết luận

Kết quả của nghiên cứu bước đầu cho thấy, việc dạy học nội dung tích phân theo hướng chú trọng KNTH giữa đạo hàm và tích phân thông qua các tình huống thực tế khác nhau đã giúp HS phát triển khả năng KNTH giữa hai khái niệm này, kết nối giữa toán học và thực tế. Từ đó, HS hiểu sâu hơn về khái niệm đạo hàm, tích phân, thấy được ứng dụng của đạo hàm, tích phân trong nhiều lĩnh vực khoa học, đời sống. Đồng thời, việc dạy học theo hướng chú trọng KNTH sẽ giúp HS phát triển năng lực MHHTH, có thái độ tích cực đối với việc học Toán, tạo động cơ thúc đẩy việc học Toán của HS. Tuy nhiên, nghiên cứu cũng cho thấy, HS gặp khó khăn trong việc thể hiện tường minh các KNTH, khó khăn khi giải quyết các tình huống thực tế phức tạp hơn với nhiều KNTH. Vì vậy, trong dạy học, GV cần chú ý rèn luyện cho HS kĩ năng trình bày hoặc chuyển đổi tường minh các KNTH liên quan đến tình huống thực tế.

Tài liệu tham khảo

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495.

Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Cai, J., & Ding, M. (2015). On mathematical understanding: perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teachers Education*, *18*(5), 1-25.

Garcia-Garcia, J., & Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 227-252.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-79). New York, NY: Macmillan.

Hiebert, J., & Wearne, D. (2004). Developing understanding through problem solving. In H. Schoen (Ed.), *Teaching Mathematics through Problem Solving* (pp. 3-13), Reston, VA: NCTM.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in south Africa. In Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M.(Eds.). *Modelling and applications in mathematics education, ICMI 14* (pp. 503-510). Springer Science & Business Media.

Leinwand, S. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics, Incorporated.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2007). Learning mathematics with understanding: A critical consideration of the learning principle in the principles and standards for school mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *4*(1), 103-114.

Walle, J. A. V. D. (2007). *Elementary and Middle School Mathematics Teaching Developmentally*. Boston: Allyn & Bacon.