VẤN ĐỀ THỰC TIỄN TRONG DẠY HỌC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Cao Thị Hà[1,+],
Vi Tiến Dũng[2,3]

[1]Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội;
[2]Trường Sĩ quan Lục quân 1; [3]Nghiên cứu sinh QH 2022, Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội
+ Tác giả liên hệ ● Email: caoha@vnu.edu.vn

Article history
Received: 25/02/2024
Accepted: 26/3/2024
Published: 05/6/2024

Keywords
Practical problems, modeling, mathematical modeling, teaching Mathematics, high schools

ABSTRACT
Using mathematical modeling in teaching is an educational trend witnessed in many countries around the world as one of the most basic methods to develop mathematical modeling capacity for students. In high school, Mathematics proves to be a subject which provides plentiful opportunities to organize modeling-based teaching. However, the mathematical modeling process is only truly effective if learners have access to modeling situations (modeling problems). This study provides the concepts and techniques to classify practical problems in the mathematical modeling process as well as the basic process for teachers to design practical problems from a mathematical problem. Not every practical problem can be the starting point of the mathematical modeling cycle in teaching Mathematics in high schools, but that practical problem must be a real problem of social life discovered, selected, and edited by teachers to suit students' cognitive progress.

1. Mở đầu

Với vai trò là môn học công cụ, toán học không chỉ giúp ích cho HS khi học ở trường học mà còn hữu ích cho các em khi bước vào thế giới việc làm. Vì vậy, một yếu tố quan trọng trong quá trình dạy học là GV cần cho HS trải nghiệm với các mô hình toán học và thực hiện mô hình hóa toán học (MHHTH). Hidayat và Iksan (2018) cho rằng, MHHTH cung cấp nền tảng trong việc giải quyết các vấn đề của thế giới thực. MHHTH còn giúp HS phát triển năng lực toán học thông qua các giả định, tính toán, giải thích các giải pháp cũng như lập luận toán học. MHHTH nên được đưa vào giảng dạy ở tất cả các cấp học, bậc học (Dundar et al., 2012; Garfunkel & Montgomery, 2019). Dundar và cộng sự (2012) cho rằng nhiệm vụ thực hiện sự cần thiết này chủ yếu thuộc về GV, bởi nếu GV không có đủ kiến thức về mô hình toán học và không có kĩ năng mô hình hóa thì HS sẽ gặp phải những vấn đề khi thực hiện MHHTH. Hai nhiệm vụ quan trọng của GV khi sử dụng MHHTH là tạo lập các tình huống MHHTH và hướng dẫn HS sử dụng quy trình MHHTH vào giải quyết vấn đề đặt ra. Bằng phương pháp phân tích và tổng hợp tài liệu, trong bài báo này, chúng tôi tổng hợp lại một số khái niệm quan trọng như mô hình, mô hình toán học, MHHTH. Bài báo cũng chỉ ra vai trò của MHHTH, phân tích sâu "vấn đề thực tiễn" - vấn đề quan trọng trong quy trình MHHTH và đưa ra các bước để GV có thể chuyển một bài toán toán học sang vấn đề thực tiễn, làm tiền đề cho việc thực hiện MHHTH trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Mô hình, mô hình toán học, mô hình hóa toán học và dạy học mô hình hóa toán học

- *Mô hình*: Theo Swetz và Hartzler (1991), *mô hình* là một mẫu, đại diện, minh họa, được thiết kế để mô tả cấu trúc, cách vận hành của một sự vật, hiện tượng, hệ thống hay một khái niệm. Dundar và cộng sự (2012) lại cho rằng, mô hình là danh từ dùng để chỉ sản phẩm xuất hiện như một kết quả của mô hình hóa, trong khi đó mô hình hóa tham chiếu đến một quá trình; mô hình là đại diện cho tình huống thực tế của cuộc sống bằng một số biểu tượng có ý nghĩa và để đơn giản hóa những điều phức tạp. Như vậy, mặc dù có cách diễn đạt khác nhau nhưng nhiều tác giả cho rằng đều có hai điểm chung: (1) Về trực giác, mô hình được hiểu như một vật, được dùng để thay thế cho vật đó trong thực tiễn; thông qua mô hình, ta có thể khám phá đối tượng mà không cần dùng đến vật thật; (2) Các mô hình là một hình thức đơn giản, hoặc được lí tưởng hóa hơn ở một số điều so với thực tiễn (Nguyễn Danh Nam, 2016; Dong, 2019; Cao Thị Hà và Nguyễn Xuân Dung, 2023). Trong nghiên cứu này, để phù hợp với đối tượng HS phổ thông, chúng tôi đồng nhất với quan điểm của Gravemeijer (2002) về khái niệm mô hình, theo đó mô hình là kết quả hoạt động học tập của HS, được HS thiết lập thông qua việc giải quyết tình huống thực tiễn.

- *Mô hình toán học*: Theo Berry và Houston (1995), mô hình toán học là một hình thức biểu diễn toán học thể hiện mối quan hệ giữa hai hoặc nhiều biến liên quan đến một tình huống hoặc vấn đề đã cho; là tổ hợp các cấu trúc như phương trình, hàm, đồ thị và kĩ năng tư duy toán học, tồn tại hoặc hình thành sau này trong tâm trí của chúng ta để mô tả một tình huống có vấn đề hoặc một tình huống thực tiễn. Dundar và cộng sự (2012) cho rằng, mô hình toán học là một hình thức biểu diễn toán học như một công thức, phương trình, đồ thị hoặc bảng, phản ánh những đặc điểm quan trọng của một tình huống đã cho. Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi, mô hình toán học là khái niệm rộng, *có thể là một mô hình vật chất (một vật, một hình khối), hoặc là mô hình phi vật chất như một công thức, phương trình, đồ thị hoặc bảng, phản ánh những đặc điểm quan trọng của một tình huống đã cho.*

- *MHHTH:* Nghiên cứu của Galbraith và Clatworthy (1990) cho rằng, MHHTH được định nghĩa là việc triển khai toán học khi giải quyết các vấn đề trong tình huống thực tiễn; trong quá trình MHHTH, các phương pháp toán học được sử dụng để tìm kiếm giải pháp liên quan đến vấn đề thực tiễn; MHHTH cung cấp một phương pháp để giải quyết các vấn đề toán học. Voskoglou (2006) cho rằng, MHHTH là sự thực hiện thành công trong việc biến một tình huống của thế giới thực thành một vấn đề toán học thông qua sử dụng một mô hình toán học; hiểu theo cách khác, MHHTH là một biểu diễn đơn giản các đặc điểm cơ bản của tình huống thực tiễn thông qua việc sử dụng một tập hợp phù hợp với các biểu tượng, mối quan hệ toán học. Theo Arseven (2015), MHHTH là quá trình suy nghĩ sâu sắc thông qua một sự kiện trong thực tiễn hoặc một biểu thức toán học và quá trình này cho phép người học kết nối toán học với thực tiễn. Garfunkel và Montgomery (2019) cho rằng, MHHTH là quá trình sử dụng toán học để biểu diễn, phân tích, đưa ra các dự đoán hoặc cung cấp cho ta cái nhìn sâu sắc về các hiện tượng trong thế giới thực.

Theo chúng tôi, có thể hiểu MHHTH là quá trình thực hiện thành công việc chuyển đổi tình huống thực tiễn thành vấn đề toán học thông qua sử dụng toán học để biểu diễn, phân tích, lí giải và từ các kết quả toán học để đưa ra lời giải cho tình huống thực tiễn đặt ra. MHHTH có một số đặc điểm cơ bản sau: (1) Sử dụng ngôn ngữ toán học để đo lường, đánh giá các hiện tượng trong thế giới thực; (2) Sử dụng toán học để khám phá và phát triển sự hiểu biết của mỗi người về các vấn đề của thế giới thực; (3) Một quy trình giải quyết vấn đề được sử dụng lặp lại, trong đó toán học được dùng để khám phá và phát triển sự hiểu biết sâu sắc hơn của mỗi cá nhân về thế giới thực.

- *Dạy học MHHTH*: Theo Abassian và cộng sự (2020): *"Các quan điểm khác nhau về MHHTH có thể được quy cho các mục tiêu trong những gì cấu thành một nhiệm vụ MHHTH, cách mô tả quá trình MHHTH và mục đích của nghiên cứu hoặc mô hình hóa"* (tr 54). Trong nghiên cứu năm 1991, Blum và Niss cho rằng, mục tiêu của MHHTH không chỉ là phát triển năng lực MHHTH mà còn để học Toán (Blum & Niss, 1991). Do vậy, hai trong các quan điểm được các nhà nghiên cứu đề cập đến đó là: học Toán thông qua mô hình hóa (modeling for the learning of mathematics) và học mô hình hóa thông qua học Toán (learning mathematics for modeling) (Erbas et al., 2014; Abassian et al., 2020). Trong nghiên cứu của các tác giả Dương Hữu Tòng và Trần Văn Tuấn (2016) đã đưa ra thuật ngữ dạy học bằng MHHTH, theo đó dạy học bằng MHHTH là dạy học cách thức xây dựng MHHTH của vấn đề thực tiễn, nhằm trả lời cho những câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn. Như vậy, tri thức toán học cần giảng dạy sẽ nảy sinh qua quá trình giải quyết các bài toán thực tiễn. Từ những quan điểm trên, theo chúng tôi có thể hiểu, dạy học *MHHTH là quá trình dạy học Toán, trong đó GV hướng dẫn HS sử dụng các mô hình toán học đã biết để giải quyết các vấn đề của thực tiễn hoặc xây dựng mô hình toán học nhằm trả lời cho những câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn, qua đó các em lĩnh hội kiến thức toán học.*

2.2. Vai trò của mô hình hóa toán học

MHHTH được coi là một năng lực cơ bản của con người để giải quyết các vấn đề trong thực tiễn và trong các lĩnh vực khác (Bộ GD-ĐT, 2018). Blum và Niss (1991) đã trình bày 5 lập luận liên quan đến vai trò của MHHTH trong quá trình dạy học môn Toán, đó là: (1) Phát triển cho HS các kĩ năng chung và sự tự tin. Quá trình dạy học môn Toán nên tạo cho HS cơ hội để thách thức, phát triển và mở rộng sự sáng tạo, kĩ năng lập luận logic, củng cố cho các em niềm tin vào khả năng sử dụng toán học trong các tình huống khác nhau, đưa ra các mức độ của tư duy phản biện như là một mục tiêu và công cụ của quá trình MHHTH; (2) Phát triển năng lực phê phán: MHHTH trong giáo dục toán học giúp HS sẵn sàng trở thành người có tư duy phản biện trong việc sử dụng toán học để giải quyết các vấn đề của cá nhân cũng như của cộng đồng, nghĩa là HS có khả năng nhận biết, phân tích, hiểu các tình huống và mô hình toán học đang sử dụng; (3) Thúc đẩy việc học Toán: MHHTH trong giáo dục toán học hỗ trợ và giúp HS có thể dễ dàng tiếp cận với các khái niệm và phương pháp toán học.

Trong nghiên cứu của Lê Hồng Quang (2017) đã đưa ra các vai trò của MHHTH, đó là: (1) Tăng cường liên hệ toán học với thực tiễn; (2) Phát triển các dự án học tập thông qua việc HS tham gia học tập, khám phá những vấn đề phức tạp liên quan đến thực tiễn và đóng vai trò là người giải quyết vấn đề; (3) Tăng cường hợp tác nhóm vì trong quá trình thực hiện mô hình hóa, HS cần thảo luận và hỗ trợ nhau trong quá trình thực hiện các mô hình; (4) Phát triển năng lực phân tích vấn đề; (5) Phát triển năng lực giải quyết vấn đề thực tiễn; (6) Phát triển tư duy sáng tạo và tư duy thống kê cho HS; (7) Phát triển kĩ năng sử dụng công nghệ thông tin.

Như vậy, mặc dù có những cách phân loại khác nhau khi nói về vai trò của MHHTH trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông, nhưng đều nhấn mạnh vai trò của MHHTH trong việc phát triển năng lực phản biện và sáng tạo cũng như năng lực lập luận logic, năng lực giải quyết vấn đề cho HS. Tuy nhiên, trong khi Blum và Niss (1991) có xu hướng nhấn mạnh vai trò của MHHTH đến yếu tố bên trong của người học (sự tự tin, khả năng hiểu ý nghĩa của vấn đề,…) thì Lê Hồng Quang (2017) lại có xu hướng quan tâm đến vai trò của MHHTH trong việc hình thành những kĩ năng xã hội cho HS (phát triển các dự án học tập, tăng cường hợp tác nhóm,…).

2.3. Vấn đề thực tiễn trong mô hình hóa toán học

Maaß (2006) cho rằng: *"Quá trình mô hình hóa luôn bắt đầu bằng một vấn đề của thế giới thực"* (tr 113). Các kết quả nghiên cứu gần đây của Nguyễn Danh Nam (2016), Lê Hồng Quang (2017), Dong (2019) đều cho rằng, quy trình MHHTH luôn bắt đầu bằng một "vấn đề thực tiễn - real world problem" và bằng cách đơn giản hóa, cấu trúc hóa, lí tưởng hóa và toán học hóa vấn đề này, dẫn đến một mô hình toán học. Bằng cách làm việc trong mô hình toán học, các giải pháp toán học có thể được tìm thấy. Giải pháp này cần được giải thích trước, sau đó mới được xác nhận. Nếu giải pháp hoặc quy trình được chọn không được chứng minh là phù hợp với thực tế, khi đó các bước cụ thể hoặc cả quá trình mô hình hóa cần được thực hiện lại. Quan điểm truyền thống thường cho rằng, toán học là "trừu tượng và xa rời thực tế", do vậy MHHTH là một trong những cách thức để thay đổi quan niệm này, bởi MHHTH không chỉ đơn giản là toán học hóa vấn đề trong thế giới thực mà còn xác nhận kết quả toán học có phù hợp với thế giới thực hay không (Maaß, 2006). Đặc biệt, Kaiser (2007) cho rằng, vai trò quan trọng của toán học chỉ có thể được thể hiện cho HS thông qua các vấn đề thực tiễn. Các *vấn đề thực tiễn* là điểm khởi đầu cho các hoạt động mô hình hóa, các hoạt động này được coi là một cách lí tưởng để nhận biết và hiểu các khía cạnh của toán học trong đời sống.

Lesh và Doerr (2003) đã chứng minh rằng, việc giải quyết các vấn đề của cuộc sống thường làm cho quá trình học Toán trở nên sâu hơn và ý nghĩa hơn. Tuy nhiên, Bora và Ahmed (2019) cho rằng, các vấn đề của thực tiễn khó giải quyết hơn so với các vấn đề được xuất hiện trong chương trình học, chỉ sau khi có được một số hướng dẫn của GV hoặc một số kinh nghiệm thì HS mới có thể tìm được câu trả lời cho vấn đề thực tiễn. Do vậy, trong dạy học môn Toán ở phổ thông, HS cần được cung cấp các giải pháp hiệu quả để giải quyết các vấn đề thực tiễn. Những tình huống thực tiễn mà người học thường gặp hàng ngày được Bora và Ahmed (2019) gọi là: *"Các hoạt động khơi gợi mô hình - model eliciting activities - MEAs*" (tr 252). Theo đó, các hoạt động khơi dậy mô hình là các tình huống không thông thường trong thực tiễn, không được định nghĩa rõ ràng và là các vấn đề mở, yêu cầu HS suy luận và giải thích về tình huống, định nghĩa và hình thức hóa quy trình từ tình huống này.

Trong bối cảnh giáo dục phổ thông hiện nay, MHHTH đang được khai thác ở hai khía cạnh. Thứ nhất, MHHTH là một năng lực cần hình thành cho HS trong quá trình dạy học môn Toán. Thứ hai, MHHTH là một phương tiện để giúp HS kiến tạo tri thức toán học và phát triển các năng lực toán học khác (Bộ GD-ĐT, 2018; Bora & Ahmed, 2019). Do vậy, việc sử dụng "vấn đề thực tiễn" như thế nào trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông là rất quan trọng. Tuy nhiên, không phải mọi vấn đề thực tiễn đều có thể là điểm khởi đầu của quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông, mà "vấn đề thực tiễn" trong MHHTH là một vấn đề của đời sống xã hội đã được GV phát hiện, lựa chọn, chỉnh sửa cho phù hợp với tiến trình nhận thức của HS.

2.4. Phân loại các vấn đề thực tiễn trong mô hình hóa toán học

Maaß (2006) cho rằng, mô hình hóa chỉ là một trong các loại nhiệm vụ liên quan đến thực tiễn, vì có vô số các nhiệm vụ liên quan đến thực tiễn. Nghiên cứu của Galbraith và Stillman (2006) đã dựa trên sự phù hợp của vấn đề thực tiễn trong MHHTH để phân chia vấn đề liên quan đến thực tiễn thành 4 loại, đó là:

- *Vấn đề gây hại (injudicious problems):* Là tình huống mà người ta lấy một công thức toán học nào đã biết, sau đó tạo ra một số câu chuyện xung quanh nó. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1: Chiều cao của một loại cây gỗ được mô hình hóa bởi công thức $y = \frac{x^2}{20}\left(1 - \frac{x}{60}\right)$, trong đó y được tính bằng mét và x là thời gian tính bằng năm kể từ khi gieo hạt. Hỏi cây gỗ đó có thể đạt được chiều cao tối đa sau bao nhiêu năm kể từ khi gieo hạt?

Trong bài toán này, dựa vào hàm số mô tả chiều cao của cây gỗ theo thời gian đã cho, ta nhận thấy cây gỗ có thể đạt được chiều cao tối đa, sau đó càng ngày nó càng thấp đi và thậm chí là chui xuống lòng đất. Như vậy, bài toán này là tình huống phi thực tế, không chỉ là một tình huống hài hước mà nó còn tạo cho người học một suy nghĩ rằng toán học là không có trong thực tiễn. Do vậy, tình huống này được Galbraith và Stillman (2006) gọi là tình huống gây hại.

- *Vấn đề tách ngữ cảnh (context-separable problems):* Là tình huống mà ngữ cảnh không đóng vai trò quan trọng trong lời giải của bài toán. Xét bài toán sau:

Ví dụ 2: Tìm bưu kiện hình trụ lớn nhất có thể vận chuyển theo yêu cầu của Bưu chính mà chiều dài cộng với chu vi không được vượt quá một mét.

Trong bài toán này, bối cảnh Bưu chính không đóng vai trò thực sự nào trong lời giải và có thể bị loại bỏ để đưa ra một câu hỏi toán học thuần túy về việc tối đa hóa thể tích của hình trụ thông qua các ràng buộc. Bài toán này hoàn toàn có lời giải và lời giải không chứa đựng yếu tố nào là mâu thuẫn với thực tiễn. Do vậy, chúng ta không nên cho rằng những câu hỏi như vậy sẽ phát triển khả năng áp dụng toán học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn cho HS.

- *Vấn đề ứng dụng tiêu chuẩn (standard applications):* Đó là tình huống mà ngữ cảnh đóng vai trò quan trọng trong việc giải bài toán, tuy nhiên với tình huống này một số dữ kiện quan trọng đã được ngầm gợi ý.

Ví dụ 3: Một chiếc thang đồng chất dài 5 mét tựa vào một bức tường nhẵn thẳng đứng, đầu dưới của nó đặt trên một mặt phẳng nằm ngang gồ ghề và cách chân tường 3 mét. Khối lượng của thang là 20kg và người thợ xây có khối lượng 80kg đã trèo lên được một phần tư chiếc thang. Hãy tìm xem người thợ xây có thể đi lên thang bao xa trước khi nó bắt đầu trượt, biết rằng hệ số ma sát là 0,5?

Ở đây, toán học có liên quan đến bối cảnh (độ phân giải và mô men của lực) và tình huống là thực tiễn. Tuy nhiên, tình huống này chứa tiêu chuẩn và người học được gợi ý những thông tin cần thiết, đây là một phần được luyện tập trong ngôn ngữ của loại vấn đề này.

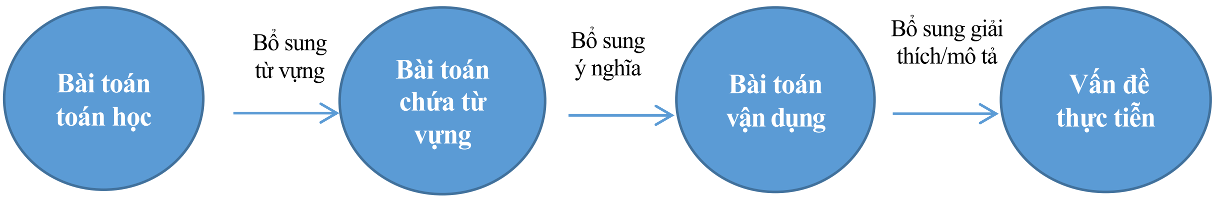
- *Vấn đề mô hình hóa (modelling problems):* Đây là tình huống mà hầu như các yếu tố toán học không được xuất hiện trực diện trong đề bài. Xem xét ví dụ sau được đề xuất bởi Garfunkel và Montgomery (2019):

Ví dụ 4: Hai giải đấu bóng đá quốc gia chính ở Úc là Liên đoàn bóng đá Úc (AFL) và Liên đoàn bóng bầu dục quốc gia (NRL). Khi cần thiết phải tách các đội có số trận thắng, trận hòa và trận thua bằng nhau, "điểm cộng" và "điểm trừ" sẽ được sử dụng. AFL hoạt động trên cơ sở tỉ lệ điểm, trong khi NRL sử dụng chênh lệch điểm. Các phương pháp có tương đương nhau không?

Ở đây chúng ta có một bài toán mô hình hóa đơn giản nhưng điển hình, trong đó không có yếu tố toán học nào xuất hiện trong bài toán, việc trình bày bài toán theo thuật ngữ toán học cần được đưa ra bởi người lập mô hình.

2.5. Xây dựng vấn đề thực tiễn từ bài toán toán học

Trong nghiên cứu của Garfunkel và Montgomery (2019), các tác giả đã đề xuất một sơ đồ để chuyển bài toán toán học sang vấn đề thực tiễn trong dạy học môn Toán. Sơ đồ này được minh họa như sau (xem sơ đồ 1).



Sơ đồ 1. Sơ đồ chuyển hóa bài toán toán học sang vấn đề thực tiễn (Nguồn: Garfunkel và Montgomery, 2019)

Theo quy trình này, xuất phát từ bài toán toán học (là bài toán mà nội dung được mô tả bằng các con số, công thức, kí hiệu, ngôn ngữ toán học), GV có thể chuyển thành bài toán có chứa từ vựng bằng cách bổ sung thêm một số từ vựng gần gũi với bối cảnh của cuộc sống để mô tả rõ hơn bài toán ban đầu; tiếp theo, từ bài toán chứa từ vựng, GV có thể bổ sung thêm từ vựng để làm rõ hơn ý nghĩa của các đối tượng có trong bài toán để bài toán đã cho trở thành bài toán mang hàm ý vận dụng tri thức toán học vào giải quyết vấn đề thực tiễn. Cuối cùng, bằng cách bổ sung thêm các giải thích hoặc mô tả để chuyển bài toán vận dụng trở thành vấn đề thực tiễn.

Ví dụ: Xét tình huống dành cho HS lớp 12 trong dạy học về Ứng dụng của đạo hàm và khảo sát hàm số, một bài toán toán học được đặt ra với HS như sau (Toán 12, Bộ Cánh Diều, tập 1):

Bài toán 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{110x-280}{x+2}$.

Một tình huống có chứa đựng "yếu tố thực tiễn" có thể đưa ra cho bài toán này bằng cách thêm vào một số từ vựng để được bài toán như sau:

Bài toán 2: Kĩ năng đánh máy của học viên (thể hiện qua tốc độ đánh máy chính xác số từ trong một phút) của một trung tâm dạy nghề được cho bởi hàm số $f(t)=\dfrac{110t-280}{t+2}$, trong đó t là số tuần học của học viên $(t>3)$. Hãy khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho. Tính $f(40)$ và nêu ý nghĩa của hàm số $f(t)$.

Như vậy, xét về bản chất thì bài toán 1 và bài toán 2 không có nhiều khác biệt về lời giải, nhưng với bài toán 2 HS sẽ hiểu hơn ý nghĩa của hàm số $f(t)$. Tuy nhiên, ta có thể bổ sung thêm một số đối tượng để bài toán 2 trở nên có ý nghĩa thực tiễn hơn như trong bài toán 3:

Bài toán 3: Kĩ năng đánh máy của học viên (thể hiện qua tốc độ đánh máy chính xác số từ trong một phút) của một trung tâm dạy nghề được cho bởi hàm số $f(t)=\dfrac{110t-280}{t+2}$, trong đó t là số tuần học của học viên $(t>3)$.

a) Tính tốc độ đánh máy trung bình của học viên sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của số từ/phút).

b) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Tốc độ đánh máy trung bình của học viên sẽ thay đổi thế nào nếu thời gian t càng lớn?

So với bài toán 1, bài toán 3 có ý nghĩa thực tiễn hơn, tuy nhiên HS cũng có thể đặt câu hỏi về việc tại sao lại phải tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số? Tại sao tốc độ đánh máy của học viên lại thể hiện bằng hàm số đã cho? Do vậy, ta có thể chuyển bài toán này vào tình huống thực tiễn sau:

Bài toán 4. Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế một mô hình để đánh giá tốc độ đánh máy của học viên sau một khoảng thời gian học tập tại đây. Để làm việc này, người ta yêu cầu học viên thống kê lại số từ của học viên đánh máy được trong một phút sau mỗi tuần. Số liệu thống kê của học viên được cho bởi bảng sau (xem bảng 1):

Bảng 1. Thống kê số từ của học viên đánh máy được trong một phút sau các tuần

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Có thể tính được tốc độ đánh máy trung bình của học viên sau 40 tuần không (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của số từ/phút)? Tốc độ đánh máy trung bình của học viên sẽ thay đổi thế nào nếu thời gian t càng lớn?

So với bài toán 2, để giải bài toán 3, HS có thể đề xuất các phương án trả lời. Phương án có thể đưa ra là tiếp tục thống kê để tính tốc độ đánh máy trung bình của học viên ở tuần thứ 35 và tuần thứ 40. Tuy nhiên, HS cũng có thể nhận thấy là không thể cứ sử dụng mãi phương pháp thống kê nếu thời gian t càng lớn. Do vậy, cần phải tìm một "quy luật" thể hiện mối quan hệ giữa thời gian t và tốc độ đánh máy trung bình của học viên, "quy luật" này vừa cho phép người học tính được tốc độ đánh máy trung bình của học viên tại một thời điểm bất kì, vừa có thể trả lời câu hỏi tốc độ đánh máy của học viên sẽ ổn định hay tiếp tục tăng khi thời gian t càng lớn.

Dựa vào dữ kiện, HS có thể tìm ra một mô hình thể hiện "quy luật". Dựa vào bảng số liệu thống kê, ta thấy với mỗi giá trị của t sẽ tương ứng với một giá trị của S, nên mô hình mà HS có thể nghĩ tới là tương quan hàm số. Mặt khác, khi t càng lớn thì tốc độ thay đổi của S không quá lớn nên các hàm số mà HS có thể tìm là hàm số bậc nhất $S(t)=f(t)=at+b,\ a\neq 0$ hoặc hàm số $S(t)=f(t)=\dfrac{at+b}{ct+d},\ a\neq 0,\ c\neq 0$. Dựa vào bảng số liệu thống kê, HS sẽ chọn được hàm số $S(t)=f(t)=\dfrac{110t-280}{t+2}$. Từ hàm số này, HS sẽ trả lời được các câu hỏi mà bài toán đặt ra.

3. Kết luận

Vấn đề thực tiễn trong MHHTH thường là vấn đề phức tạp và theo hướng mở, liên quan đến hiện thực, việc suy luận đa hướng là cần thiết khi giải quyết chúng (Maaß, 2006). Tuy nhiên, trong quá trình dạy học, nội dung cần được lựa chọn một cách phù hợp dựa trên môi trường dạy học và đối tượng người học. Điều đó có nghĩa là để quy trình MHHTH được diễn ra thì vấn đề thực tiễn nên được GV sàng lọc và lựa chọn cho phù hợp. Hơn nữa, để đạt được mục tiêu dạy học, trong một số trường hợp, một bài toán toán học có thể được GV biến đổi thành một vấn đề thực tiễn. Tuy vậy, yếu tố quan trọng cần lưu ý là việc thêm các dữ kiện, ngữ cảnh cho các bài toán toán là rất quan trọng nhưng chưa đủ để một bài toán toán học trở thành vấn đề thực tiễn, phục vụ cho quá trình MHHTH. Một vấn đề thực tiễn trong quá trình MHHTH phải cung cấp đủ thông tin cho người học, đã được GV điều chỉnh cho phù hợp với tiến trình nhận thức của người học và các mục đích sư phạm.

Tài liệu tham khảo

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53-65.

Arseven, A. (2015). Mathematical Modelling Approach in Mathematics Education. *Universal Journal of Educational Research*, *3*(12), 973-980.

Berry, J., & Houston, K. (1995). Students using posters as a means of communication and assessment. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 21-27.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects. State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Bora, A., & Ahmed, S. (2019). Mathematical Modeling: An Important Tool for Mathematics Teaching. *Online Submission*, *6*(2), 252-256.

Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

Cao Thị Hà, Nguyễn Xuân Dung (2023). Phát triển năng lực mô hình hóa cho học sinh trong dạy học Hàm số ở lớp 10 trung học phổ thông. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, *19*(03), 21-27.

Dong, T. H. N. (2019). *The role of lecturers and factors affecting individual working competency of students at Thai Nguyen University-Vietnam through mathematical modelling process*. In Proceedings of the 11th Asian Conference on Education (pp. 267-282).

Dundar, S., Gokkurt, B., & Soylu, Y. (2012). Mathematical modelling at a glance: a theoretical study. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *46*, 3465-3470.

Dương Hữu Tòng, Trần Văn Tuấn (2016). Dạy học bằng mô hình hóa toán học: Một chiến lược dạy học khái niệm logarit ở trường phổ thông. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Cần Thơ*, *46*, 62-72.

Erbas, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Cakiroglu, E., Alacaci, C., & Bas, S. (2014). Mathematical modeling in mathematics education: basic concepts and approaches. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *14*(4), 1621-1627.

Galbraith, P. L., & Clatworthy, N. J. (1990). Beyond standard models - meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics*, *21*(2), 137-163.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 143-162.

Garfunkel, S., & Montgomery, M. (Eds.). (2019). *GAIMME - Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hidayat, R., & Iksan, Z. H. (2018). Mathematical modelling competency for Indonesian students in mathematics education programmes. *Creative Education*, *9*(15), 2483-2490.

Kaiser, G. (2007). *Modelling and modelling competencies in school*. Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lê Hồng Quang (2017). Vai trò của phương pháp mô hình hóa toán học trong dạy và học Toán ở trường phổ thông. *Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt tháng 3*, 110-113.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?. *ZDM*, *38*, 113-142.

Nguyễn Danh Nam (2016). *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*. NXB Đại học Thái Nguyên.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*. The National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.

Voskoglou, M. G. (2006). The use of mathematical modelling as a tool for learning mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *16*, 53-60.