

MỘT SỐ BIỆN PHÁP PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHỦ ĐỀ “ĐA THỨC” Ở TRUNG HỌC CƠ SỞ

Nguyễn Thị Kiều Nga

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Email: nguyenthikieunga@hpu2.edu.vn

Article history

Received: 15/3/2024

Accepted: 10/4/2024

Published: 20/6/2024

Keywords

Mathematical thinking and reasoning competency, students, polynomials, secondary schools

ABSTRACT

The ability to think and reason mathematically is considered one of the core elements of mathematical competence, which needs to be formed and developed for school students in the context of current educational innovation. As an important content in the Math secondary school curriculum, Polynomial problems are very diverse with many different solutions. Therefore, teaching solving polynomial problems can provide numerous opportunities to enhance students' mathematical thinking and reasoning. This study proposes three measures to develop students' mathematical thinking and reasoning competency in teaching solving problems on the topic “Polynomials” in secondary schools. Pedagogical measures have been proposed based on the theoretical basis and manifestations of the mathematical thinking and reasoning competency of secondary school students.

1. Mở đầu

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, năng lực tư duy và lập luận toán học (TD&LLTH) là một trong những thành tố cốt lõi của năng lực toán học, cần hình thành và phát triển cho HS phổ thông (Bộ GD-ĐT, 2018). Phát triển năng lực TD&LLTH cho HS có ý nghĩa quan trọng trong dạy học môn Toán, giúp các em phát triển được tư duy, kỹ năng lập luận để giải quyết các vấn đề toán học cũng như các vấn đề trong thực tiễn. Để giải quyết vấn đề bằng công cụ toán học, trước hết người học cần huy động khả năng TD&LLTH của mình để tìm ra cách thức giải quyết, đồng thời trình bày, nghiên cứu sâu lời giải. Năng lực TD&LLTH đòi hỏi HS phải thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa, tương tự; biết lập luận hợp lý trước khi kết luận; điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học (Đỗ Văn Hùng và Nguyễn Quyết Chiến, 2023).

Trong chương trình môn Toán ở THCS, chủ đề “Đa thức” là một nội dung quan trọng, là kiến thức cơ sở để HS học các kiến thức về hàm số, phương trình, hệ phương trình, bất phương trình,... Các bài toán về đa thức rất phong phú, đa dạng và có nhiều bài toán khó. Đặc biệt, khi giải các bài tập về đa thức, HS thường gặp khó khăn trong việc xác định hướng giải hoặc mắc sai lầm trong quá trình lập luận, trình bày lời giải. Do vậy, việc phát triển năng lực TD&LLTH sẽ giúp HS nhanh chóng tìm được hướng giải bài toán và lập luận chặt chẽ, logic khi trình bày lời giải. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và đề xuất 3 biện pháp phát triển năng lực TD&LLTH cho HS THCS trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức”.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

- Khái niệm “tư duy”: Theo Trần Ngọc Lan và Trương Thị Tố Mai (2015), tư duy là một quá trình nhận thức phản ánh những thuộc tính bản chất, phát hiện ra tính quy luật của sự vật. Theo Phạm Minh Hạc (1998), tư duy phản ánh những thuộc tính bên trong, bản chất, những mối liên hệ có tính quy luật của sự vật, hiện tượng mà trước đó ta chưa biết. Theo Nguyễn Quang Uẩn và cộng sự (2012), tư duy là một quá trình tâm lý phản ánh những thuộc tính bản chất, mối liên hệ và quan hệ bên trong có tính quy luật của sự vật, hiện tượng trong hiện thực khách quan. Từ các quan điểm trên, có thể hiểu “tư duy” là hoạt động trí tuệ của con người, thể hiện ở khả năng suy nghĩ logic và sáng tạo trong việc nhận thức, phân tích, đánh giá và giải quyết vấn đề.

- Khái niệm “lập luận toán học”: Lithner (2008) cho rằng, lập luận là một hoạt động, là quá trình lập luận, trong đó sử dụng tư duy để đi đến một kết luận hoặc đưa ra một nhận định mới đúng. Theo Trần Mạnh Sang và Nguyễn Văn Thái Bình (2020), lập luận là một thành phần, một phương thức đặc thù của tư duy toán học và là một thành

phần của năng lực toán học, tập trung vào khả năng của HS thực hiện hoạt động suy luận và chứng minh (hoặc bác bỏ). Như vậy, có thể hiểu “lập luận toán học” là khả năng của mỗi cá nhân sử dụng ngôn ngữ toán học để đưa ra các kết luận đúng. Đó là kết quả của quá trình tư duy logic, bằng một chuỗi các suy luận để giải quyết vấn đề.

- Khái niệm “năng lực TD&LLTH”: Trong quá trình dạy học môn Toán, các hoạt động tư duy và lập luận toán học giữ vai trò quan trọng, vừa là phương tiện nhận thức, vừa gắn liền với mục tiêu phát triển năng lực tư duy cho HS. Hoạt động “tư duy” và hoạt động “lập luận toán học” có mối liên hệ mật thiết, biện chứng lẫn nhau, tư duy diễn ra trong suy nghĩ và bộc lộ ra bên ngoài thông qua ngôn ngữ, lập luận toán học. Lập luận toán học là kết quả của quá trình tư duy và ngược lại, tư duy để đưa ra lập luận. Từ các nghiên cứu trên về khái niệm “tư duy” và “lập luận toán học”, theo chúng tôi có thể hiểu năng lực TD&LLTH là khả năng của HS sử dụng các thao tác tư duy và suy luận toán học để giải thích, chỉ ra các chứng cứ, lập luận nhằm điều chỉnh cách thức giải quyết vấn đề để đi đến kết luận đúng trong quá trình giải quyết vấn đề.

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, năng lực TD&LLTH của HS THCS gồm các biểu hiện sau: (1) Thực hiện được các thao tác tư duy, đặc biệt biết quan sát, giải thích được sự tương đồng và khác biệt trong nhiều tình huống và thể hiện được kết quả của việc quan sát; (2) Thực hiện được việc lập luận hợp lí khi giải quyết vấn đề; (3) Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; chứng minh được mệnh đề toán học không quá phức tạp.

2.2. Đề xuất biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức”

2.2.1. Hướng dẫn học sinh phát hiện và khắc phục được sai lầm thường gặp trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức”

* Mục đích của biện pháp: Trong quá trình dạy học giải các bài toán về đa thức, GV cần hướng dẫn cho HS phát hiện và sửa chữa sai lầm nhằm giúp các em phát triển được khả năng lập luận, giải quyết vấn đề và điều chỉnh được cách giải, từ đó phát triển được năng lực TD&LLTH.

* Cách thức thực hiện biện pháp: Sai lầm sẽ tạo ra mâu thuẫn và mâu thuẫn chính là động lực thúc đẩy quá trình nhận thức của HS. Mặt khác, sai lầm cũng có thể làm cho HS kém đi nếu các em không phát hiện được các sai lầm và biết cách sửa chữa nó. Để giúp HS phát hiện và khắc phục được sai lầm khi giải các bài toán về đa thức, GV có thể đưa ra lời giải các bài toán có sai lầm, hướng dẫn các em phân tích từng bước trong lời giải, đối chiếu, so sánh với các kiến thức toán học đã có, từ đó phát hiện ra sai lầm và biết cách sửa chữa sai lầm, điều chỉnh cách thức giải bài toán.

Ví dụ 1: Hãy xác định bậc của đa thức $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x$.

GV đưa ra lời giải bài toán có chứa sai lầm như sau: Do số mũ lớn nhất của đa thức là 2 nên bậc của đa thức là 2.

Phân tích: Ở cách giải trên, HS đã sai lầm khi không xét trường hợp $m^2 - 1 = 0$, mà khẳng định ngay bậc của đa thức là 2.

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm: Do HS không nắm vững khái niệm bậc của đa thức, xét thiếu trường hợp $m^2 - 1 = 0$, hay $m = \pm 1$ (xét $m = 1$ thì $f(x) = -4x$ nên bậc của $f(x)$ là 1; $m = -1$ thì $f(x) = 0$ nên $f(x)$ không có bậc).

Cách khắc phục: Để giúp HS sửa chữa sai lầm, trước hết GV yêu cầu các em nhắc lại khái niệm bậc của đa thức một biến: Bậc của đa thức một biến là số mũ lớn nhất của biến trong đa thức đó. Đa thức không là đa thức không có bậc.

Từ đó, HS sửa chữa được sai lầm và đưa ra lời giải: Xét $m^2 - 1 = 0$, suy ra $m = \pm 1$. Khi $m = 1$ thì $f(x) = 0$ nên $f(x)$ không có bậc; khi $m = -1$ thì $f(x) = -4x$ nên bậc của $f(x)$ là 1. Xét $m^2 - 1 \neq 0$, hay $m \neq \pm 1$, khi đó bậc của $f(x)$ là 2.

Như vậy, từ lời giải có chứa sai lầm của một bài toán, GV hướng dẫn HS phát hiện ra sai lầm, lập luận để điều chỉnh được cách thức giải bài toán và trình bày được lời giải đúng.

2.2.2. Hướng dẫn học sinh tìm nhiều cách giải khác nhau trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức”

* Mục đích của biện pháp: Giúp HS biết xét bài toán theo nhiều phương diện, góc độ khác nhau, bằng cách chỉ ra các chứng cứ, lập luận hợp lí để tìm các cách giải cho bài toán đó; từ đó, các em rèn luyện được các thao tác của tư duy, đồng thời rèn luyện được tính mềm dẻo của tư duy, lập luận hợp lí khi giải quyết vấn đề.

* Cách thức thực hiện biện pháp: Một bài toán về đa thức có thể có nhiều cách giải. Phân tích các bài toán dưới nhiều khía cạnh, góc độ khác nhau có thể có các cách giải khác nhau. Với các bài toán về đa thức có nhiều cách giải,

GV có thể hướng dẫn HS phân tích bài toán theo các hướng khác nhau để tìm ra các cách giải, từ đó các em xác định được cách giải hay và ngắn gọn.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức $x^2 + 2xa - y^2 + 2ya$ thành nhân tử.

GV có thể hướng dẫn cho HS phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử như: đặt nhân tử chung, nhóm các hạng tử, tách hạng tử, thêm bớt hạng tử, dùng hằng đẳng thức. Từ đó, HS có thể giải bài toán theo các cách sau:

$$\begin{aligned} \text{Cách 1 (nhóm các hạng tử): } x^2 + 2xa - y^2 + 2ya &= (x^2 - y^2) + (2xa + 2ya) \\ &= (x - y)(x + y) + 2a(x + y) = (x + y)(x - y + 2a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2 (sử dụng hằng đẳng thức): } x^2 + 2xa - y^2 + 2ya &= (x^2 + 2xa) - (y^2 - 2ya) \\ &= (x^2 + 2xa + 1) - (y^2 - 2ya + 1) = (x + a)^2 - (y - a)^2 = (x + a + y - a)(x + a - y + a) \\ &= (x + y)(x - y + 2a). \end{aligned}$$

HS nhận thấy, để phân tích đa thức thành nhân tử theo cách 1, cần nhóm các hạng tử một cách thích hợp và phân tích để xuất hiện nhân tử chung. Để phân tích đa thức thành nhân tử theo cách 2, cần căn cứ vào các hạng tử của đa thức, có thể thêm bớt các hạng tử để xuất hiện hằng đẳng thức. Từ đó, HS xác định được cách giải thứ nhất ngắn gọn hơn. Thông qua ví dụ trên, GV giúp HS có thể xét bài toán dưới nhiều góc độ để tìm được các lời giải khác nhau cho bài toán. Mặt khác, với mỗi cách phân tích đa thức khác nhau, HS được rèn luyện khả năng tư duy, lập luận chặt chẽ, hợp lí nhờ đó phát triển được năng lực TD&LLTH.

2.2.3. Rèn luyện cho học sinh các thao tác tư duy cơ bản trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức”

* Mục đích của biện pháp: Tư duy có vai trò quan trọng trong quá trình học tập của HS, giúp các em nắm vững các kiến thức toán học và vận dụng kiến thức vào thực tiễn cũng như học các môn học khác. Việc rèn luyện thường xuyên các thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa,... cho HS trong quá trình dạy học sẽ phát triển các thao tác tư duy cơ bản cho các em.

* Cách thức thực hiện biện pháp:

- Rèn luyện thao tác tư duy phân tích, tổng hợp cho HS: Phân tích là tách (trong tư tưởng) một hệ thống thành những vật, tách một vật thành những bộ phận riêng lẻ; tổng hợp là liên kết (trong tư tưởng) những bộ phận thành một vật, liên kết nhiều vật thành một hệ thống (Nguyễn Bá Kim, 2015). Như vậy, phân tích và tổng hợp là hai thao tác tư duy khác nhau nhưng lại thống nhất với nhau. Trong dạy học môn Toán, thao tác phân tích thường được sử dụng để tìm hiểu đề bài, nhận diện bài toán thuộc dạng nào, phân tích các mối liên hệ giữa các yếu tố trong bài toán,...; sau đó tổng hợp các yếu tố, điều kiện vừa phân tích trong bài toán để đưa ra điều kiện mới, kết luận mới,... Do đó, để rèn luyện thao tác tư duy phân tích và tổng hợp cho HS trong dạy học giải các bài toán về đa thức, GV có thể hướng dẫn cho HS thực hiện theo các bước sau: (1) Phân tích bài toán, tìm hiểu đề bài, xác định rõ giả thiết (các yếu tố đã cho) và yêu cầu, nhiệm vụ cần giải quyết; (2) Tìm mối liên hệ giữa yêu cầu, giả thiết của bài toán với các kiến thức đã biết; huy động những kiến thức có liên quan (như các khái niệm, định nghĩa, tính chất, định lí, các dạng bài toán đã biết,...), từ đó đưa ra định hướng giải bài toán; (3) Tổng hợp các vấn đề vừa phân tích để trình bày lời giải bài toán.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^{67} + x^9 + x^2$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x + 1$.

GV có thể yêu cầu HS phân tích bài toán thông qua việc cho các em trả lời hệ thống câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Bài toán yêu cầu gì? (Câu trả lời mong đợi: Chứng minh đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$).

Câu hỏi 2: Để chứng minh đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$, ta có thể sử dụng các cách chứng minh nào? (Câu trả lời mong đợi: HS có thể đưa ra các cách sau: (1) Chia $f(x)$ cho $g(x)$ và chỉ ra đa thức dư bằng 0; (2) Phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử, trong đó có nhân tử $g(x)$; (3) Biến đổi $f(x)$ thành tổng các đa thức chia hết cho đa thức $g(x)$; ...).

Câu hỏi 3: Có thể chia $f(x)$ cho $g(x)$ được không? (Câu trả lời mong đợi: Không nên chia $f(x)$ cho $g(x)$ vì đa thức $f(x)$ có bậc cao).

Câu hỏi 4: Có thể phân tích đa thức $f(x)$ thành nhân tử, trong đó có nhân tử $g(x)$ được không? (Câu trả lời mong đợi: Vì $f(x)$ có bậc cao nên khi phân tích thành nhân tử sẽ trở thành bài toán khá phức tạp).

GV hướng dẫn cho HS để chứng minh $f(x)$ chia hết cho $g(x)$, cần biến đổi $f(x)$ thành một tổng các đa thức chia hết cho $g(x)$. Ta có $f(x) = (x^2 + x + 1) + (x^{67} - x) + (x^9 - 1) = (x^2 + x + 1) + x(x^{66} - 1) + (x^9 - 1)$. Để thấy $x^{66} - 1$ và $x^9 - 1$ đều viết được dưới dạng $x^{3k} - 1$. Do $x^{3k} - 1 = (x^3)^k - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$ và $x^3 - 1$ chia hết cho $g(x)$ (do $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = (x - 1) \cdot g(x)$) nên $x^{66} - 1$ và $x^9 - 1$ đều chia hết cho $g(x)$. Vậy đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$.

- Rèn luyện thao tác tư duy khái quát hóa cho HS. Khái quát hóa là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho đến việc nghiên cứu một tập hợp lớn hơn, bao gồm cả tập hợp ban đầu; đặc biệt hóa là việc chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang việc nghiên cứu một tập hợp nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho (Polya, 2010). Khái quát hóa và đặc biệt hóa là hai thao tác tư duy ngược nhau. Để rèn luyện thao tác tư duy khái quát hóa, GV có thể yêu cầu các em thực hiện các hoạt động sau: - Bước 1: Xác định vấn đề cần giải quyết; - Bước 2: Xác định đặc điểm của các đối tượng đã cho trong bài toán. Phân tích các trường hợp riêng lẻ để xác định các dấu hiệu chung, bản chất; Bước 3: Phát biểu bài toán tổng quát.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x - 3)^{100} - x^{100} - 2x + 3$ chia hết cho đa thức $g(x) = 2x - 3$. Em hãy phát biểu bài toán tổng quát của bài toán đã cho.

Hướng dẫn: Ta có $f(x) = [(x - 3)^{100} - x^{100}] - (2x - 3)$. Vì 100 là số chẵn nên $(x - 3)^{100} - x^{100}$ chia hết cho $(x - 3) + x$, hay $(x - 3)^{100} - x^{100}$ chia hết cho $2x - 3$. Khi đó ta đặt $(x - 3)^{100} - x^{100} = (2x - 3)h(x)$, với $h(x)$ là một đa thức. Do vậy, $f(x) = g(x)(h(x) - 1)$, hay $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$.

Để khái quát bài toán, GV yêu cầu HS thực hiện các hoạt động theo các bước trên như sau:

Bước 1: Xác định vấn đề cần giải quyết: Tìm bài tổng quát của bài toán đã cho.

Bước 2: Xác định đặc điểm của các đối tượng đã cho trong bài toán, phân tích các trường hợp riêng lẻ để xác định các dấu hiệu chung, bản chất: GV hướng dẫn cho HS chỉ ra mối liên hệ của $(x - 3)^{100} - x^{100}$ và $2x - 3$ (vì 100 là số chẵn nên áp dụng tính chất $a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$ với n chẵn, ta có $(x - 3)^{100} - x^{100}$ chia hết cho $(x - 3) + x = 2x - 3$).

Bước 3: Phát biểu bài toán khái quát hóa. Từ các phân tích của bước 2, HS phát biểu được bài toán khái quát hóa như sau: "Cho n là số tự nhiên chẵn. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x - 3)^n - x^n - 2x + 3$ chia hết cho đa thức $g(x) = 2x - 3$ ".

- Rèn luyện thao tác tư duy tương tự hóa: Theo Chu Cẩm Thơ (2014), tương tự là thao tác tư duy dựa trên sự giống nhau về tính chất và quan hệ của những đối tượng toán học khác nhau. Trong dạy học môn Toán, tương tự là thao tác phổ biến mà HS thường dùng để giải các dạng toán có sự tương đồng về cách giải. Để rèn luyện thao tác tư duy này, GV có thể hướng dẫn HS thực hiện các bước sau: - Bước 1: Xác định vấn đề cần giải quyết; - Bước 2: Xác định các yếu tố tương tự của bài toán cần giải với bài toán đã biết; - Bước 3: Trình bày lời giải.

Ví dụ 5: Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $5a - 3b + 2c = 0$. Chứng minh rằng $f(-1)f(-2) \leq 0$.

Hướng dẫn: Ta có $f(-1) = a - b + c$, $f(-2) = 4a - 2b + c$. Vì $f(-1) + f(-2) = 5a - 3b + 2c = 0$ nên $f(-1) = -f(-2)$. Suy ra $f(-1)f(-2) = -(f(-2))^2 \leq 0$.

Từ ví dụ trên, GV yêu cầu HS giải bài toán tương tự sau:

Ví dụ 6: Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, biết $a + b = 0$. Chứng minh rằng $f(-2)f(3) \geq 0$.

Để giải bài toán, GV yêu cầu HS thực hiện các hoạt động theo các bước ở trên như sau:

Bước 1: Xác định vấn đề cần giải quyết: Chứng minh rằng $f(-2)f(3) \geq 0$.

Bước 2: Xác định các yếu tố tương tự của bài toán cần giải với bài toán đã biết: Trong ví dụ 5 và ví dụ 6, giả thiết của bài toán đều cho mối liên hệ của các hệ số trong đa thức và yêu cầu chứng minh tích các giá trị của đa thức khi

$x = a_1$ và $x = a_2$ là không dương hoặc không âm. Từ mối quan hệ của các hệ số của đa thức, ta xác định được mối quan hệ của $f(a_1)$ và $f(a_2)$.

Bước 3: HS trình bày lời giải: Ta có $f(3) = 9a + 3b + c$, $f(-2) = 4a - 2b + c$. Do $f(3) - f(-2) = 5a + 5b = 5(a + b) = 0$ nên $f(3) = f(-2)$, suy ra $f(-2)f(3) = (f(3))^2 \geq 0$.

3. Kết luận

Năng lực TD&LLTH có vai trò rất quan trọng đối với HS trong quá trình dạy học môn Toán. Dựa trên các biểu hiện đặc trưng của năng lực TD&LLTH, bài báo đã đề xuất ba biện pháp phát triển năng lực này cho HS trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức” ở THCS. Mỗi biện pháp đều có các ví dụ minh họa, phân tích làm sáng tỏ cơ hội phát triển năng lực TD&LLTH cho HS thông qua các biểu hiện cụ thể của năng lực TD&LLTH. Để thực hiện hiệu quả các biện pháp này trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức”, GV cần tăng cường rèn luyện cho HS các kỹ năng giải toán, cách trình bày lời giải một bài toán logic, chặt chẽ; biết xét bài toán dưới nhiều góc độ để tìm được các cách giải khác nhau, cũng như khái quát hóa, tương tự hóa bài toán ban đầu để thu được những bài toán mới.

Tài liệu tham khảo

- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Chu Cẩm Thơ (2014). *Phát triển tư duy thông qua dạy học môn Toán ở trường phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm.
- Đỗ Văn Hùng, Nguyễn Quyết Chiến (2023). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học các dạng toán chuyển động đều (Toán 5). *Tạp chí Giáo dục*, 23(số đặc biệt 10), 19-24.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Nguyễn Bá Kim (2015). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn Quang Uẩn, Nguyễn Văn Lũy, Đinh Văn Vang (2012). *Tâm lý học đại cương*. NXB Đại học Sư phạm.
- Polya. G. (2010). *Toán học và những suy luận có lí*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- Phạm Minh Hạc (1998). *Giáo trình Tâm lý học*. NXB Giáo dục.
- Trần Mạnh Sang, Nguyễn Văn Thái Bình (2020). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh chuyên toán trung học phổ thông trong dạy học chủ đề “Phương pháp đếm nâng cao”. *Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt kì 1 tháng 5*, 111-116.
- Trần Ngọc Lan, Trương Thị Tố Mai (2009). *Rèn luyện tư duy cho học sinh trong dạy học Toán bậc tiểu học*. NXB Trẻ.