

## ỨNG DỤNG PHÉP DỰNG HÌNH MỀM TRONG DẠY HỌC TOÁN CHO HỌC SINH Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Nguyễn Đăng Minh Phúc<sup>+</sup>,  
Huỳnh Minh Sơn

Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế  
+Tác giả liên hệ • Email: nguyendangminhphuc@dhsphue.edu.vn

### Article History

Received: 18/12/2020

Accepted: 28/12/2020

Published: 20/01/2021

### Keywords

soft construction, dragging manipulation, dynamic mathematics representation, solving problem competency, students.

### ABSTRACT

With the advent of dynamic geometry software, the quality of Geometry teaching has been significantly improved. In a construction problem, the analysis step plays a crucial role in figuring out how to construct it. Dragging operations on dynamic mathematical representations have the ability to support the analysis step well when changing the positions of mathematical objects while retaining defined relationships between them. The paper presents some research results applying soft construction in teaching Mathematics in high schools. When using dynamic geometry software, teachers should consider students' ability to perform dragging, rendering or tracing operations; designing math tasks that can apply drag and drag operations to assist students in developing extrapolation, mastering math problems and developing their awareness.

### 1. Mở đầu

Cùng với sự ra đời của phần mềm hình học động, chất lượng dạy học hình học đã được cải thiện đáng kể (Holzl, 1996); (Kortenkamp, 1999). Các phần mềm này cho phép học sinh (HS) dựng hình chính xác, nhanh chóng, quan sát và có được những phản hồi trực quan thông qua thao tác kéo rê các đối tượng của hình (Finzer và Jackiw, 1998). Các nghiên cứu của Holzl (1996), Leung (2011) đã đưa ra những phương thức kéo rê khác nhau trên biểu diễn toán động trong việc hỗ trợ HS phát hiện ra các tính chất, mối quan hệ của các đối tượng toán học, cũng như giúp các em đề xuất và kiểm chứng các giả thuyết toán học.

“Phép dựng hình cứng” (chặt chẽ về mặt toán học) là những phép dựng hình bảo toàn các mối quan hệ khi kéo rê, cho phép người dùng xây dựng các biểu diễn toán động, chứa các bất biến toán học cơ sở, để từ đó tìm kiếm các bất biến toán học mới (Hứa Thuần Phong, 1951). Tuy nhiên, Healy (2000) đã phát hiện rằng, thay vì chú ý hoàn toàn đến các phép dựng hình cứng, HS có xu hướng ưa thích khám phá các phép dựng hình đơn giản hơn, trong đó các tính chất toán học được thể hiện một cách tự nhiên. Dù tính chặt chẽ chưa được bảo đảm, nhưng dựa trên các phương thức kéo rê khác nhau, HS có thể tiến hành khảo sát, tìm kiếm, thử nghiệm để đi đến việc tìm ra được cách dựng hình chính xác.

Trong một phép dựng hình cứng, việc kéo rê giúp người học xác minh trực quan về sự hợp lí của phép dựng hình. Với một “phép dựng hình mềm”, việc kéo rê chưa có tính xác minh nhưng là một công đoạn quan trọng (bước phân tích) trong 4 bước giải quyết bài toán dựng hình. Các phép dựng hình mềm hỗ trợ người học chuyển đổi từ cách tiếp cận theo kinh nghiệm sang tiếp cận lí thuyết (chỉ ra các bước dựng) trong việc giải quyết bài toán dựng hình. Bài báo trình bày một số kết quả nghiên cứu ứng dụng phép dựng hình mềm trong dạy học Toán ở trường phổ thông.

### 2. Kết quả nghiên cứu

#### 2.1. Khung lí thuyết nghiên cứu

Từ việc đề xuất khái niệm “hình học động”, các nghiên cứu của Finzer và Jackiw (1998), Kortenkamp (1999) nhận thấy, các đối tượng hình học có thể được dựng trên máy tính và giữ các tính chất, quan hệ giữa chúng khi người dùng thực hiện các thao tác lên đối tượng toán học. Quá trình thay đổi cấu trúc, hình dạng của đối tượng toán học được dựng trên các phần mềm hình học động, là quá trình xóa - dựng diễn ra liên tiếp, rất nhanh mà mắt thường không nhìn thấy được. Việc xây dựng các đối tượng toán học trên máy tính phát sinh khái niệm biểu diễn toán học, làm nguyên liệu cũng như môi trường hỗ trợ HS thực hiện các khảo sát thực nghiệm toán học và đánh giá hiểu biết toán học dựa trên máy tính.

#### 2.2. Biểu diễn toán động

Một biểu diễn toán động là mô tả trực quan của một hệ các đối tượng toán học được dựng một cách chặt chẽ trên các phần mềm hình học động (Finzer và Jackiw, 1998). Nếu dựng tam giác  $ABC$  bất kì trên phần mềm thì các đỉnh

$A, B, C$  này có thể di động được, khiến tam giác biến dạng thành bất kỳ một loại tam giác khác, như: tam giác vuông, tam giác cân hoặc tam giác đều, tùy theo thao tác kéo rê của người dùng. Lưu ý rằng, tổng ba góc trong tam giác vẫn luôn không đổi và bằng  $180^0$ .

Chế độ kéo rê trong các phần mềm ở trên đã và đang đóng một vai trò quan trọng trong các nghiên cứu khảo sát quá trình HS tạo ra các phỏng đoán hình học. Dạng bài toán quỹ tích sử dụng các thao tác kéo rê có thể hỗ trợ HS hình thành các giả thuyết ngoại suy, cũng như phát triển suy luận ngoại suy cho các em.

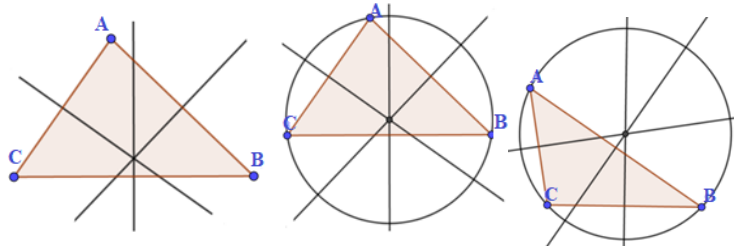
### 2.3. Phép dựng hình mềm

Khi người ta bắt đầu nghiên cứu về hình học động, nhiệm vụ hầu hết là các phép dựng hình cứng, tức là những phép dựng hình này bảo toàn các mối quan hệ toán học đã có trước khi kéo rê. Đối với phép dựng hình mềm, HS chọn một trong những tính chất để dựng sao cho hình thỏa mãn tính chất đó một cách tự nhiên. Healy (2000) đã phân biệt vai trò của việc kéo rê trong các phép dựng hình cứng và phép dựng hình mềm. Trong một phép dựng hình cứng, việc kéo rê giúp xác minh trực quan về sự hợp lí của phép dựng hình, còn trong một phép dựng hình mềm, việc kéo rê không có tính xác minh nhưng là một phần chính của phép dựng hình đó. Bằng cách thực hiện thao tác kéo rê, các yếu tố bất biến toán học có thể xuất hiện trong hình vẽ, phụ thuộc vào giả thiết đã cho. Điều này dẫn đến một sự chuyển đổi từ cách tiếp cận theo thực hành sang tiếp cận lí thuyết trong quá trình giải quyết các vấn đề hình học.

Chẳng hạn, với nhiệm vụ dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác (nhiệm vụ dựng hình cứng), HS chỉ được yêu cầu dựng tâm là giao điểm của ba đường trung trực, sau đó, dựng đường tròn với tâm và bán kính là đoạn nối tâm đến một đỉnh bất kì. Ngược lại, trong một nhiệm vụ dựng hình mềm, HS được cho sẵn một tam giác và đường tròn. HS thực hiện thao tác kéo rê đường tròn để nó đi qua ba đỉnh của tam giác. Sau đó, HS quan sát sự thay đổi của vị trí tâm đường tròn, phỏng đoán về quỹ tích của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

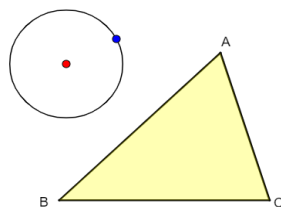
Theo Healy (2000), các nhiệm vụ trong phép dựng hình cứng và phép dựng hình mềm có thể hỗ trợ quá trình trực quan hóa: Phép dựng hình cứng cung cấp một cách thức để xác minh phép dựng hình, trong khi đó phép dựng hình mềm cung cấp cơ hội để phỏng đoán thông qua hình ảnh hiện thời, hỗ trợ cho quá trình suy luận.

Chẳng hạn, với nhiệm vụ toán học sau: Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác thông qua hai phép dựng hình cứng và phép dựng hình mềm trên Geogebra. Trong nhiệm vụ có sử dụng phép dựng hình cứng, các đường trung trực của ba cạnh được dựng bằng cách sử dụng công cụ Perpendicular Bisector. Giao điểm của ba đường trung trực được dựng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Bằng cách kéo rê các đỉnh của tam giác, HS có thể kiểm tra tính đúng đắn của cấu trúc này bằng cách thấy rằng đường tròn luôn đi qua các đỉnh. HS cũng có thể nhận thấy, tâm của đường tròn nằm ngoài tam giác khi tam giác có góc tù (xem hình 1).

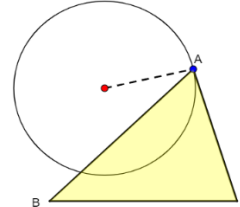


Hình 1. Dựng hình cứng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Trong nhiệm vụ dựng hình mềm, nhiệm vụ cho sẵn một tam giác và một đường tròn có thể thay đổi được bằng cách kéo rê tâm của nó và một điểm trên đường tròn (xem hình 2a). Đầu tiên, HS kéo rê điểm trên đường tròn đến một đỉnh, giả sử là  $A$ , rồi nối tâm của đường tròn với điểm  $A$  bằng đường nét đứt (xem hình 2b).



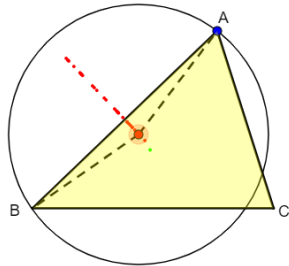
Hình 2a



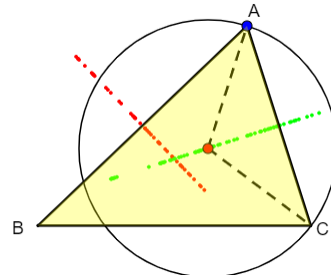
Hình 2b

Sau đó, HS kéo rê tâm đường tròn đến các vị trí nào đó sao cho đường tròn cũng đi qua một đỉnh khác (đỉnh  $B$ ), và khi điều này xảy ra, ta nối  $B$  với tâm bằng một đường nét đứt. Các vị trí của tâm được tạo vết và HS có thể thấy

rằng hình dạng quỹ tích của các tâm đường tròn đi qua  $A$  và  $B$  là một đường thẳng (xem hình 2c). HS có thể tìm được ngay quỹ tích tâm của đường tròn này là trung trực của đoạn  $AB$  (thông qua việc xét hai tam giác đồng dạng).

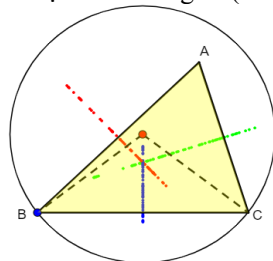


Hình 2c

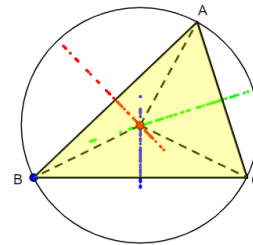


Hình 2d

Khi HS nhận ra quỹ tích của tâm đường tròn là đường trung trực, các em có thể tìm thấy vị trí của các tâm khi đường tròn đi qua  $A, C$  (xem hình 2d) và  $B, C$  (xem hình 2e), cuối cùng HS nhận ra tâm đường tròn là giao điểm của ba đường trung trực của ba cạnh của tam giác (xem hình 2f).



Hình 2e



Hình 2f

Ví dụ trên minh họa việc thực hiện một nhiệm vụ toán học với phép dựng hình mềm bằng cách ghi lại quỹ tích của các vị trí thỏa mãn các điều kiện cho trước. Quỹ tích thông qua phép dựng hình mềm cung cấp cái nhìn tổng thể và là cơ sở cho suy luận logic để HS giải quyết bài toán dựng hình.

Một nhiệm vụ toán học là tập hợp các nội dung được thiết kế sẵn, thu hút người học vào các hoạt động học tập và có thể thay đổi cách nhìn và cách làm toán của họ (Leung, 2011). Một nhiệm vụ cũng được thực hiện một cách toàn diện, nghĩa là các chức năng hoặc công cụ sử dụng cho phép người học mở rộng hoặc thay đổi cách nhìn để tiếp nhận kiến thức mà không bị mất đi khi họ thực hiện theo các cách tương tự trong những môi trường khác. Mặc dù các nhiệm vụ toán học sử dụng phép dựng hình mềm đã được trình bày trong một số các nghiên cứu trước đây, tuy nhiên quá trình thiết kế thường không được nêu rõ ràng. Bên cạnh đó, sáng tạo các nhiệm vụ có sử dụng các phép dựng hình mềm là một thách thức không nhỏ đối với giáo viên nên việc thiết kế các nhiệm vụ như vậy thông qua các biểu diễn toán động vẫn còn ít được nghiên cứu.

## 2.4. Nghiên cứu thực nghiệm ứng dụng phép dựng hình mềm trong dạy học Toán ở trường phổ thông

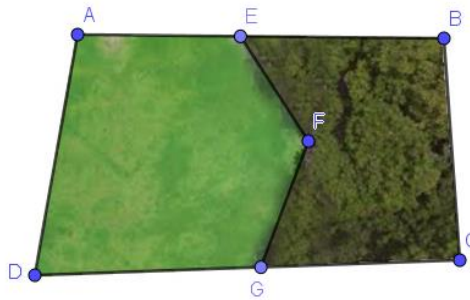
### 2.4.1. Quy trình nghiên cứu

Chúng tôi phân tích các dạng toán có thể tận dụng được thế mạnh của phép dựng hình mềm để thiết kế phiếu học tập gồm các bài toán dựng hình, sau đó tiến hành thực nghiệm tại Trường THPT An Lương Đông, Phú Lộc, Thừa Thiên Huế vào tháng 6/2020. Phương pháp nghiên cứu được chúng tôi sử dụng là phương pháp nghiên cứu trường hợp, lựa chọn 12 HS lớp 11 để tiến hành thực nghiệm trên máy tính, cho HS tương tác trực tiếp với phần mềm Geogebra. Tên các HS được viết thành HS1, HS2,... khi trình bày trong mục kết quả phân tích dữ liệu.

### 2.4.2. Công cụ nghiên cứu

Công cụ nghiên cứu bao gồm các biểu diễn toán học động, được thiết kế trên phần mềm Geogebra tích hợp vào phiếu học tập và phiếu thăm dò ý kiến HS. Dưới đây, chúng tôi trình bày một nhiệm vụ học tập thiết kế các hoạt động có sử dụng phép dựng hình mềm như sau:

**Bài toán** (dựng lại bờ rào): Bác Bình và bác Tâm có hai mảnh đất nằm kề nhau như hình 3. Hai bác thống nhất thay ranh giới đường gấp khúc thành một đoạn thẳng sao cho diện tích của hai mảnh đất không thay đổi. Bạn hãy giúp hai bác giải quyết vấn đề đó.



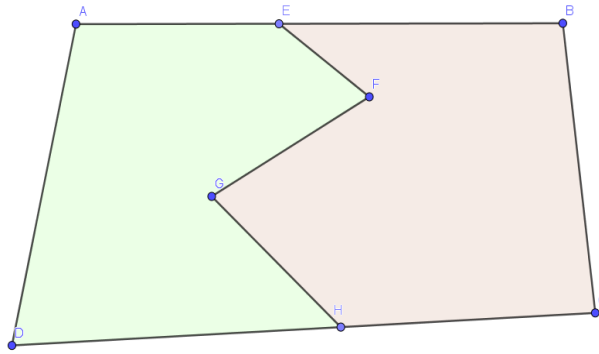
Hình 3

Nhiệm vụ 1: Dự đoán vị trí đoạn ranh giới cần dựng.

Nhiệm vụ 2: Dựng đoạn ranh giới thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhiệm vụ 3: Chứng minh cách dựng.

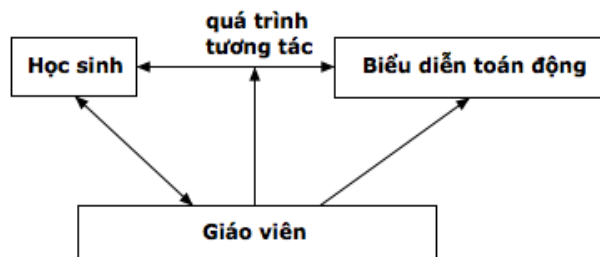
Nhiệm vụ 4: Khảo sát và nêu cách dựng lại bờ rào thành một đoạn thẳng trong trường hợp có ba đường gấp khúc.



Hình 4

#### 2.4.3. Thu thập dữ liệu và phân tích dữ liệu

Các dữ liệu thu được bao gồm: phiếu học tập của HS, bảng hỏi khảo sát, dữ liệu ghi âm các trao đổi của HS. Để phân tích dữ liệu, chúng tôi sử dụng tiếp cận HS học toán với các biểu diễn toán học động dưới sự hỗ trợ của giáo viên và đánh giá dựa trên máy tính. Tiếp cận này được thể hiện thông qua mô hình sau (xem hình 5):

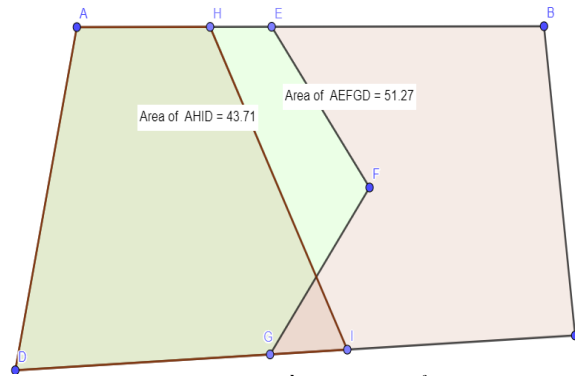


Hình 5. Mô hình phân tích dữ liệu thực nghiệm

Dựa trên mô hình này, chúng tôi phân tích các khía cạnh sau: - Giáo viên làm nhiệm vụ thiết kế biểu diễn động, quan sát và định hướng các quá trình tương tác của HS với biểu diễn toán động; - HS tương tác trực tiếp với các biểu diễn toán động, trao đổi, phản hồi với giáo viên; - Các biểu diễn toán động được thiết kế bởi giáo viên và sẽ được thay đổi dưới sự tương tác của HS và kích thích ngược lại quá trình tương tác của HS.

#### 2.4.4. Kết quả phân tích dữ liệu

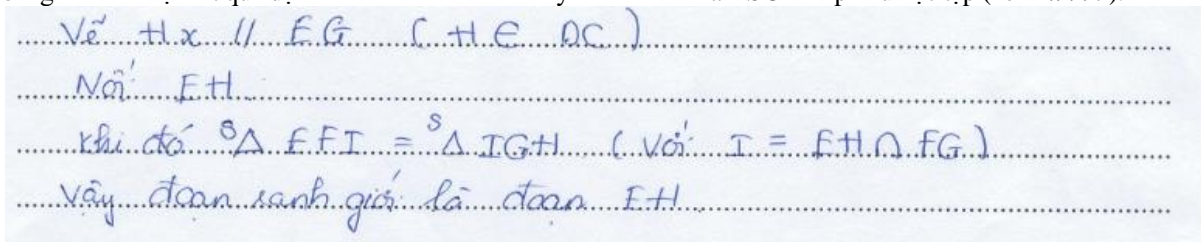
Bài toán là một tình huống thực tế về “dựng lại bờ rào”. HS lúng túng khi tìm hiểu đề bài, nhiều em còn nhầm là chia đôi diện tích khu đất. Sau khi hiểu đề, các nhóm đều có được ý tưởng thiết kế ứng dụng phép dựng dựng hình mềm để dự đoán đường ranh giới (xem hình 6).



Hình 6. Dựng hình mềm đường thẳng ranh giới

Để giải quyết nhiệm vụ 1, HS1 đã đưa ra ý tưởng giải quyết vấn đề như sau: - Dựng một đường bất kì (đường thẳng này là HI); - Đo diện tích hình AEFGD và AHID rồi di chuyển HI này để hai diện tích này bằng nhau.

Ở bài toán này, HS3 đã đưa ra các câu hỏi và trả lời những câu hỏi đó, từ đó định hướng giải quyết nhiệm vụ. Để giải thích tại sao phải kẻ HI để dự đoán quỹ tích, HS1 đã kết hợp cả biểu diễn hình ảnh và biểu diễn kí hiệu. Tuy nhiên, do thay đổi luôn 2 điểm H và I nên điều này là cản trở lớn để các em có thể nhận ra được quỹ tích. Trong quá trình thảo luận, HS3 đã đưa ra ý tưởng cho cố định điểm H và tìm quỹ tích. Không chỉ vậy, các bạn đã thể hiện được bằng cách thử lại kết quả dự đoán của mình. Dưới đây là bài làm của HS 3 trên phiếu học tập (xem hình 7).



Hình 7. Bài làm nhiệm vụ 1 của HS3

Bài làm của HS3 đã dự đoán đúng quỹ tích nhưng chưa chứng minh được vì sao diện tích tam giác  $EFI$  và tam giác  $IGH$  bằng nhau. Mặt khác, nhiệm vụ này có độ khó vừa phải, do đó các em tích cực thể hiện các kĩ năng giao tiếp, hợp tác và thảo luận nhóm để giải quyết vấn đề. Trong nhiệm vụ thứ 4, dựng lại bờ rào với 3 đường gấp khúc, chưa HS nào hoàn thành được.

Trong quá trình thực nghiệm, HS cũng gặp một số khó khăn trong việc khảo sát, chẳng hạn như việc lần đầu tiên tiếp xúc và tương tác với phần mềm Geogebra khiến các em mất thời gian để khám phá cách sử dụng các thao tác trên phần mềm này. Ngoài ra, một số HS chưa thực sự tập trung trong quá trình khảo sát trên phần mềm Geogebra, chẳng hạn như các em còn tò mò về phần mềm nên kích hoạt dấu vết lộn xộn, hoặc không đọc kĩ yêu cầu bài toán, các nhiệm vụ nên đi sai hướng.

#### 2.4.5. Một số đánh giá

Các phép dựng hình mềm thể hiện tính năng của các phần mềm hình học động cho phép bảo toàn các tính chất toán học của đối tượng thông qua các phép kéo rê. Thông qua các tình huống thực nghiệm ở trên HS cho thấy, việc thiết kế các tình huống ứng dụng phép dựng hình mềm cần cung cấp cho HS các công cụ dựng hình cơ bản để các em có thể thực hiện. Mỗi tình huống cần có những khảo sát ban đầu cho HS làm quen với mô hình và thực hiện những thao tác kéo rê cơ bản. Tình huống cũng cần được thiết kế theo từng bước, có những gợi mở sao cho các em có thể thực hiện với độ khó tăng dần. Bằng phép dựng hình mềm, HS đã tích cực thực hiện các phương thức kéo rê khác nhau nhằm tìm vết của đối tượng. HS không chỉ được học mà còn được trải nghiệm, hứng thú hơn trong học tập.

Thông qua thực nghiệm, chúng tôi đã phân tích dữ liệu của các phiếu học tập, các quá trình và hoạt động tương tác giữa giáo viên với HS, HS với biểu diễn toán động và quay phim quá trình sử dụng mô hình trên máy tính. Các giả thuyết được hình thành trong quá trình khảo sát trên biểu diễn toán động, được đề xuất thông qua trao đổi giữa các HS trong nhóm. Những giả thuyết này được tiếp tục củng cố nhờ các hoạt động kéo rê duy trì, kéo rê thử nghiệm. Các giả thuyết được các em đề xuất, thay đổi khá phong phú. Cuối cùng, các HS cũng đều chỉ ra được dấu vết của

điểm kéo rê khi duy trì một tính chất nào đó. Hầu hết các HS trong thực nghiệm đều đưa ra những dự đoán chính xác cho bài toán dựng hình nhờ sử dụng phép dựng hình mềm.

### 3. Kết luận

Việc giải quyết các bài toán dựng hình đã trở nên dễ dàng hơn khi HS có thể thực hiện bước phân tích thông qua các biểu diễn toán động. Phép dựng hình mềm đã cho thấy, HS có thể thực hiện cách tiếp cận tự nhiên hơn trong quá trình tìm kiếm cách dựng một hình. Cũng nhờ phép dựng hình mềm và các tính năng của phần mềm hình học động, các đối tượng toán học trở nên sinh động hơn, những thao tác kéo rê giúp HS bảo toàn các tính chất toán học đã có từ trước, bộc lộ các tính chất toán còn tiềm ẩn, hay đơn giản là thay đổi hình dạng.

Môi trường hình học động cần tối giản, giúp HS có thể tập trung vào dựng hình, tìm kiếm và phát hiện tính chất, tìm ra được cách dựng hình và giải quyết vấn đề. Khi sử dụng các phần mềm hình học động, GV cần cân nhắc đến khả năng thực hiện các thao tác kéo rê, dựng hình hay tạo vết của HS; thiết kế các nhiệm vụ toán học có thể ứng dụng các thao tác kéo rê nhằm hỗ trợ HS phát triển các suy luận ngoại suy, nắm vững các vấn đề toán học và phát triển nhận thức cho các em.

### Tài liệu tham khảo

- Arzarello, F. et al. (2002). *A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments*. ZDM, 34(3), 66-72.
- Borwein J.M., Bailey D.H., Girgensohn R., (2004). *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. AK Peters Ltd.
- Finzer W., Jackiw N. (1998). *Dynamic manipulation of Mathematics objects*. Key Curriculum Press, USA.
- Healy, L. (2000) *Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions*. In: *Proceedings of the 24<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, T. Nakahara and M. Koyama (Eds.) (Vol.1, 103-117) Hiroshima: Hiroshima University.
- Holz, R. (1996). *How does "dragging" affect the learning of geometry*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(2), 169-187.
- Hứa Thuần Phong (1973). *Dựng hình* (người dịch: Phạm Hồng Tuất). NXB Giáo dục.
- Kortenkamp U. (1999). *Foundation of Dynamic Geometry*. Dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich, Germany.
- Laborde, C. (2005). *Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamics geometry environments*. In *Proceedings of the Tenth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22-35). Korea National University of Education, Cheong-Ju, South Korea.
- Leung, A. (2011). *An epistemic model of task design in dynamic geometry environment*. ZDM Mathematics Education, 325-336. DOI: 10.1007/s11858-011-0329-2.
- Shabanova M. (2014). *Experimental mathematics and mathematics education*. DOI: 10.5593/sgemsocial2014/b13/s3.042. Corpus ID: 123975037.