

MỘT SỐ ĐỊNH HƯỚNG TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC NHẪM RÈN LUYỆN TRÍ TƯỞNG TƯỢNG KHÔNG GIAN CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Nguyễn Chiến Thắng^{1,+},
Đậu Anh Tuấn²

¹Trường Đại học Vinh; ²Sở Giáo dục và Đào tạo Nghệ An
+Tác giả liên hệ • Email: thangnc@vinhuni.edu.vn

Article history

Received: 09/8/2021

Accepted: 15/9/2021

Published: 20/10/2021

Keywords

Spatial imagination,
Geometry, training, high
school

ABSTRACT

Spatial imagination plays an important role in math education and in life. The content of geometry in the Math curriculum in high schools plays an important role in training and developing spatial imagination for students. The article presents some problems about spatial imagination, characteristics of Geometry content and proposes some orientations in teaching Geometry in order to train spatial imagination for high school students. The research results also provide typical examples illustrating the proposed points as well as orientations, thereby helping teachers identify mathematical forms in teaching Geometry in the direction of training spatial imagination for high school students.

1. Mở đầu

Trí tưởng tượng không gian (TTTTKG) đã được nhiều nhà giáo dục trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Cùng với các thao tác tư duy cơ bản như phân tích, tổng hợp và so sánh, trong quá trình học tập các yếu tố hình học, học sinh (HS) sẽ được tiến hành một loại hoạt động trí óc đặc biệt, đó là TTTKG. Theo Gardner (2016), năng lực trí giác không gian, TTTKG và tư duy hình học tích cực độc lập được coi là các bộ phận của trí khôn không gian. Theo Korutecxki (1981), một trong những tiêu chuẩn và dấu hiệu về năng lực toán học của HS là có TTTKG phát triển. Trong dạy học Hình học, để giải các bài toán hình học đòi hỏi HS phải có khả năng không gian; giáo viên (GV) cần tạo môi trường học tập có nhiều cơ hội cho HS tương tác để phát triển khả năng không gian hơn là học tập thông thường. Theo Bùi Văn Nghị (2008), phân môn Hình học có nhiều cơ hội để phát triển TTTKG, rèn luyện kỹ năng lập luận chứng minh phản chứng cho HS. Trong nghiên cứu của Vũ Thị Thái (2001) đã so sánh mối quan hệ giữa TTTKG và tư duy không gian, đề xuất các tình huống dẫn đến những biến đổi biểu tượng không gian cho HS. Nguyễn Thị Xuân (2012) đã nghiên cứu về vấn đề phát triển năng lực tư duy và TTTKG cho HS thông qua hoạt động cắt ghép hình.

Hình học là một trong những nội dung quan trọng của giáo dục toán học, rất cần thiết cho HS trong việc lĩnh hội các kiến thức về không gian và phát triển các kỹ năng cơ bản (Bộ GD-ĐT, 2018). Một trong những mục tiêu của mạch kiến thức Hình học xuyên suốt ở phổ thông là phát triển TTTKG. Vì vậy, việc tìm hiểu về TTTKG và đưa ra các định hướng rèn luyện loại hình trí óc này trong dạy học Toán nói chung và dạy học Hình học nói riêng là cần thiết và có ý nghĩa thực tiễn. Bài báo trình bày một số vấn đề về TTTKG, đặc điểm của nội dung Hình học và đề xuất một số định hướng trong dạy học Hình học nhằm rèn luyện TTTKG cho HS THPT.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Trí tưởng tượng không gian

2.1.1. Trí tưởng tượng

Theo Hoàng Phê (2003), *trí* là khả năng nhận thức, ghi nhớ, suy nghĩ, phán đoán, ... của con người; *tưởng tượng* là tạo ra trong trí óc hình ảnh của cái không có trước mắt hoặc chưa hề có. Theo tâm lý học, con người không chỉ hình dung trong trí óc những cái đã từng tri giác, đã có trong kinh nghiệm của bản thân mà còn tạo ra biểu tượng về những cái mà mình chưa từng gặp và tri giác trước đó. Những biểu tượng này không phải là biểu tượng của trí nhớ mà là biểu tượng của tưởng tượng. Do đó, tưởng tượng là một quá trình tâm lý phản ánh những cái chưa từng có trong kinh nghiệm của cá nhân bằng cách xây dựng hình ảnh mới trên cơ sở những biểu tượng đã có (Bùi Văn Huệ và cộng sự, 2021). Tưởng tượng có vai trò rất quan trọng trong mọi hoạt động của con người. Thông thường, trước khi chế tạo hay xây dựng một vật nào đó trong thực tiễn, con người đã "sáng tạo" ra vật đó trong trí óc của mình. Nhờ tưởng tượng mà nội dung của các biểu tượng của kí ức thường được bổ sung và thay đổi. Theo Bùi Văn Nghị (2008),

không có trí tưởng tượng thì không có sự sáng tạo nào hết. Bởi yếu tố được sáng tạo là cái mới, cái chưa có, nên phải tưởng tượng ra nó.

Như vậy, có thể hiểu, *trí tưởng tượng* là khả năng nhận thức của con người nhằm tạo ra hình ảnh của những cái đã từng tri giác nhưng không có trước mắt hoặc phản ánh cái chưa từng có trong kinh nghiệm của cá nhân bằng cách xây dựng các biểu tượng mới dựa trên những hình ảnh, biểu tượng đã có.

Ở trường phổ thông, trí tưởng tượng được phát triển nhằm giúp HS lĩnh hội kiến thức học tập. Sự tìm hiểu những vật thể và hiện tượng, việc phát hiện ra các mối liên hệ giữa chúng và sự hình thành các biểu tượng, khái niệm khoa học cũng nhằm phát triển khả năng quan sát, trí tưởng tượng và tư duy logic của HS (Xcatkin, 1982).

2.1.2. Trí tưởng tượng không gian

“Không gian” được đề cập ở đây là không gian Euclid 2 chiều, 3 chiều trong chương trình môn Toán ở THPT (dựa trên những biểu tượng không gian thực mà con người có thể cảm thụ được - không gian vật lí). Đó là một cấu trúc bao gồm các tập hợp sau: - Các hình hình học, các vật thể; - Các tính chất định tính: hình dạng của các hình, vị trí tương đối giữa các hình, các vật thể; phương, hướng; - Các quan hệ trước - sau, phải - trái, trên - dưới; - Các yếu tố về lượng: khoảng cách, chu vi, diện tích; thể tích các hình, khối,...

Như vậy, có thể hiểu TTTKG là khả năng nhận thức của con người để tạo ra hình ảnh của những đối tượng không gian đã từng tri giác nhưng không có trước mắt hoặc phản ánh những đối tượng không gian chưa từng có trong kinh nghiệm của cá nhân bằng cách xây dựng hình ảnh, biểu tượng không gian mới trên cơ sở các biểu tượng không gian đã có.

2.2. Một số định hướng trong dạy học Hình học nhằm rèn luyện trí tưởng tượng không gian cho học sinh trung học phổ thông

Hình học là một bộ phận của toán học, chuyên nghiên cứu về những mối quan hệ và hình dạng không gian, đây là khoa học về các hình, vị trí tương đối, kích thước các bộ phận của chúng và các phép biến hình. Những khái niệm hình học ban đầu được hình thành nhờ sự trừu tượng hóa, đó là sự gạt bỏ các tính chất và mối liên hệ của các vật trong thực tiễn, chỉ giữ lại vị trí tương đối và các đại lượng. Hình học hoàn toàn thoát khỏi tính bất định và sự biến động của các hình dạng và kích thước thật. Sự trừu tượng hóa kích thước của vật thể như vậy dẫn đến các khái niệm *điểm*, *đường thẳng* và *mặt phẳng* mà cách diễn đạt đòi hỏi trí tưởng tượng cao bởi chúng không có trong thực tiễn. Chẳng hạn: “Điểm là cái không có bộ phận”, “Đường có chiều dài mà không có chiều rộng”, “Mặt là cái chỉ có chiều dài và chiều rộng”, “Một đường thẳng có thể kéo dài ra vô hạn”,... Sự trừu tượng hóa trong hình học không dừng lại ở một mức độ nhất định mà tiến từ mức này sang mức khác, như: tam giác hay tứ giác có thể xuất phát từ những hình ảnh trong thực tiễn, nhưng đa giác n - cạnh là khái niệm khái quát ở mức độ cao, được hình thành từ các đa giác với số cạnh cụ thể đã được trừu tượng trước đó. Điều này làm cho các khái niệm hình học có tính chất phổ biến hơn, tức là ít gắn với các sự vật cụ thể, tạo cho hình học có khả năng tưởng tượng cao (Phạm Văn Hoàn, 1981). Nghiên cứu hình học không gian là nghiên cứu hình biểu diễn của các hình không gian trên mặt phẳng nên trí tưởng tượng được phát triển (Bùi Văn Nghị, 2008). Vì vậy, trong chương trình môn Toán ở THPT, mạch kiến thức Hình học có nhiều tiềm năng trong việc phát triển TTTKG cho HS. Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số định hướng trong dạy học Hình học nhằm rèn luyện TTTKG cho HS THPT:

- *Thứ nhất*, thông qua mạch kiến thức Hình học, GV cần chú trọng hình thành cho HS các biểu tượng không gian, đó là biểu tượng về tính chất và mối quan hệ của các đối tượng không gian, giúp các em phân tích các biểu hiện của chúng và xây dựng biểu tượng không gian mới một cách logic, có cơ sở khoa học. Vị trí và kích thước trong Hình học được định nghĩa bằng các quan hệ không gian; các phép biến hình, phép chiếu cũng là một mối liên hệ giữa hai hình trong không gian, đó là ảnh và tạo ảnh qua các phép biến đổi hình học. Các biểu tượng không gian được hình thành và phát triển với mức trừu tượng nâng cao dần, chẳng hạn từ các biểu tượng “tam giác”, “tứ giác”, “đa giác n - cạnh” dẫn đến các biểu tượng trừu tượng tăng dần như “hình chóp tam giác”, “hình chóp tứ giác”, “hình chóp n - giác”. Chính sự trừu tượng cao, đòi hỏi TTTKG cao dẫn đến những khó khăn của HS trong quá trình học tập và biểu diễn hình học.

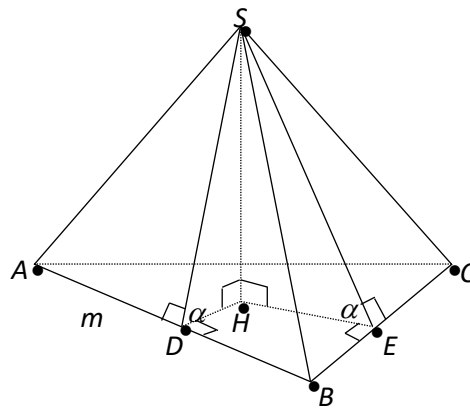
Bên cạnh đó, 1 trong 5 thành phần của năng lực toán học cần hình thành và phát triển cho HS trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ GD-ĐT (2018) là năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán. Điều này giúp HS có cơ hội để vận dụng, trải nghiệm phần mềm hình học động vào giải quyết hình học, qua đó phát triển TTTKG, biết tìm mối quan hệ giữa TTTKG và trực quan.

Việc hình thành và phát triển TTTKG có ý nghĩa quan trọng đối với HS trong học tập nội dung Hình học không gian. HS sẽ lĩnh hội kiến thức hình học không gian (các sự kiện diễn ra trong không gian 3 chiều) thông qua hình

biểu diễn của các hình không gian trên mặt phẳng (không gian 2 chiều). Do vậy, nếu các biểu tượng không gian được xây dựng một cách chính xác, vững chắc trong trí óc, HS sẽ hình dung tốt hơn các đối tượng và mối quan hệ trong không gian 3-chiều khi làm việc trên các hình biểu diễn, từ đó phát triển TTTKG của mình.

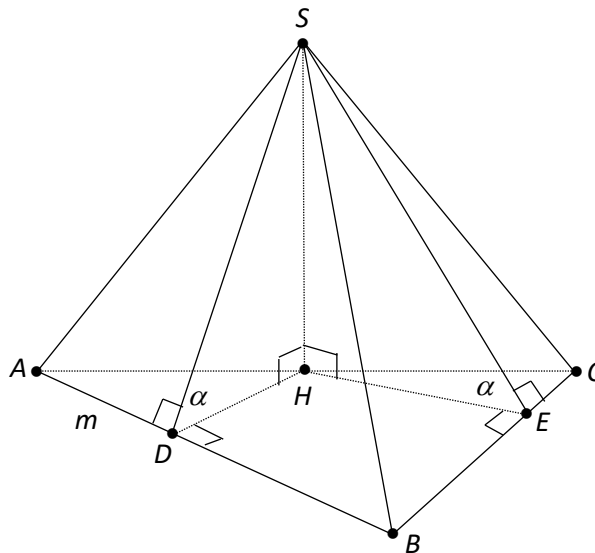
Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là một tam giác đều có chiều dài cạnh là m . Mặt bên SAC của hình chóp vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lại đều tạo với đáy một góc là α . Tính thể tích của hình chóp theo m và α .

Công thức tính thể tích hình chóp là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} h \cdot S_{\text{đáy}}$, trong đó h là độ dài đường cao, $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy. Vì ABC là tam giác đều nên việc tính diện tích của tam giác này là không khó, vấn đề ở đây là tính độ dài đường cao h . Trước hết, HS cần xác định đường cao của hình chóp, giả sử là SH . Với bài toán này, nếu không nắm vững biểu tượng về hai mặt phẳng vuông góc và không hình dung được mối quan hệ không gian, HS có thể vẽ hình biểu diễn của bài toán như *hình 1*.



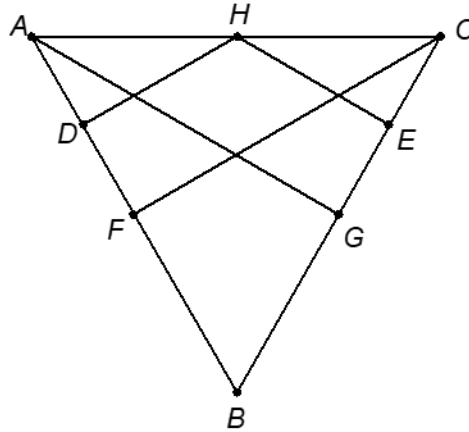
Hình 1

Hình biểu diễn này không phản ánh đúng tính chất của bài toán và gây khó khăn cho HS trong quá trình tìm lời giải. Thật vậy, từ $(SAC) \perp (ABC)$, $S \in (SAC)$, $SH \perp (ABC)$ nên SH phải nằm trong mặt phẳng (SAC) và $H \in AC$. Ngoài ra, vì hai tam giác vuông SHD và SHE bằng nhau nên $HD = HE$, suy ra H thuộc đường phân giác của góc ABC , tam giác ABC đều nên H là trung điểm của AC . Do đó, hình biểu diễn đúng phải là hình 2.



Hình 2

Như vậy, bài toán quy về tính HD hoặc HE . Đến đây, HS có thể tách tam giác ABC ra khỏi hình biểu diễn ở hình 2. Việc tách thành các hình phẳng với các mối liên hệ đúng trên hình 2 sẽ góp phần phát triển TTTKG cho HS. Ta được hình vẽ sau (xem hình 3):



Hình 3

$$\begin{aligned} & \text{Ở đây, } AG \text{ và } CF \text{ là hai đường trung trực của tam giác đều } ABC, \text{ ta có } HD // CF, HE // AG, \text{ nên } HD = HE = \frac{1}{2} CF \\ & = \frac{m\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

- Thứ hai, trong dạy học phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc, GV cần rèn luyện cho HS kỹ năng vận dụng các phép chiếu này để xác định hình chiếu của một hình không gian trên mặt phẳng theo các phương khác nhau; qua đó giúp các em biểu diễn hình học không gian chính xác, đồng thời có một công cụ giải toán hình học không gian hiệu quả, tạo cơ hội rèn luyện TTTKG.

Theo Trần Văn Hạo và cộng sự (2007), phép chiếu song song được định nghĩa: Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ . Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu. Phương Δ gọi là phương chiếu. Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ .

Các bất biến của phép chiếu song song giúp cho TTTKG phong phú hơn và đảm bảo suy luận logic: - Tính chất thẳng hàng của các điểm và thứ tự của chúng; - Khái niệm đường thẳng, tia, đoạn thẳng (không song song với phương chiếu); - Tỉ số đơn của hệ ba điểm thẳng hàng không nằm trên đường thẳng song song với phương chiếu. Đặc biệt, phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng; biến hình bình hành không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu thành hình bình hành; bảo toàn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng; bảo toàn trung điểm của đoạn thẳng không song song với phương chiếu, trọng tâm của tam giác không nằm trong mặt phẳng chiếu.

Từ đó, HS có thể sử dụng phép chiếu song song để giải các bài toán hình học ở THPT chứa đựng các yếu tố: thẳng hàng, đồng quy, trung điểm, trọng tâm, tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng liên tiếp trên một đường thẳng.

Ví dụ 2: Trong không gian, cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c . Dụng đường thẳng Δ cắt a, b, c lần lượt tại A, B, C , sao cho $\frac{BA}{BC} = k$ ($k > 0$ cho trước).

Hướng dẫn:

Giả sử I, J, K là ba điểm thuộc ba đường thẳng đã cho xác định mặt phẳng (P) . Bài toán trên chỉ chứa các bất biến afin cũng là bất biến của phép chiếu song song: đường thẳng, thẳng hàng, tỉ số các đoạn cùng phương.

Sử dụng phép chiếu song song theo phương b lên mặt phẳng (P) dẫn tới bài toán phẳng sau: “Cho góc xOy và điểm J nằm trong góc đó. Dụng qua J cắt tuyến $A'C'$ sao cho $\frac{JA'}{JC'} = k$ ”.

Bài toán phẳng được giải nhờ sử dụng phép vị tự $V_{(J,k)}$. Từ đó, chuyển sang bài toán không gian với chú ý: $Ox \equiv a'$; $Oy \equiv c'$, ảnh của a, c lên mặt phẳng (P) qua phép chiếu trên (xem hình 4).

Đối với phép chiếu vuông góc, Trần Văn Hạo và cộng sự (2007) đưa ra định nghĩa: Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) . Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) .

Như vậy, phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của một phép chiếu song song. Ngoài ra, phép chiếu vuông góc còn có tính chất riêng quan trọng sau đây: Qua phép chiếu vuông góc, góc vuông xOy biến thành góc vuông $x'O'y'$ khi và chỉ khi nó có ít nhất một cạnh song song với (hoặc thuộc) mặt phẳng chiếu còn cạnh kia không vuông góc với mặt phẳng chiếu.

- Thứ ba, GV cần trang bị cho HS các phương pháp khác nhau trong dạy học Hình học ở THPT như: phương pháp tổng hợp, phương pháp vectơ và phương pháp giải tích. Ba phương pháp cơ bản này giúp HS xây dựng biểu tượng không gian theo các hình thái khác nhau để giải quyết các vấn đề của hình học một cách chính xác, đồng thời cung cấp cho các em công cụ để đưa ra các phán đoán, trực giác không gian.

Phương pháp tổng hợp được hiểu là phương pháp xây dựng hình học dựa vào một hệ tiên đề (chẳng hạn hệ tiên đề Hin-be), mà ở đó không thể hiện ý tưởng đại số hóa hình học. Ở đây, các hình hình học được biểu diễn bằng những hình vẽ, do đó khi sử dụng phương pháp tổng hợp thì hình vẽ đóng vai trò quan trọng vì nó là điểm tựa trực giác cho việc tìm tòi lời giải của bài toán (Lê Thị Hoài Châu, 2015). Chẳng hạn, đường tròn tâm O bán kính R là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng cách một điểm cho trước một khoảng không đổi.

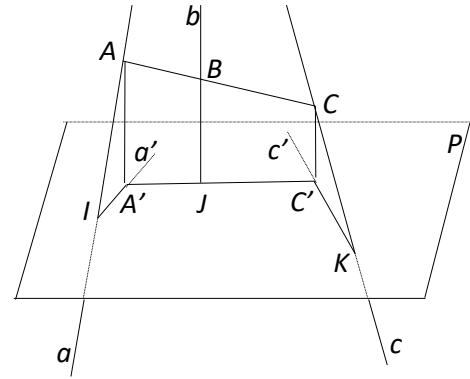
Phương pháp vectơ giúp HS có thể cộng, trừ, nhân trực tiếp trên các đối tượng hình học, không thoát ra ngoài phạm vi hình học, do vậy vừa tận dụng được công cụ đại số, vừa khai thác được phương diện trực giác trong quá trình tìm tòi lời giải bài toán (Lê Thị Hoài Châu, 2015). Chẳng hạn, đường tròn đường kính AB là tập hợp tất cả các điểm M trong mặt phẳng sao cho $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$.

Với phương pháp giải tích, thông qua trung gian là một hệ tọa độ, ta thay thế các đối tượng và quan hệ hình học thành những đối tượng và quan hệ đại số. Sau đó, chuyển các tính chất hình học thành tính chất đại số, quy bài toán hình học thành bài toán đại số. Chẳng hạn: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

- Thứ tư, một trong những mục tiêu quan trọng trong dạy học Hình học là giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với hình học. Thực tiễn là nguồn gốc của toán học nói chung, hình học nói riêng. Mỗi khái niệm, mỗi tính chất hình học dù trừu tượng đều tìm thấy hình ảnh và ứng dụng của nó trong thực tiễn. Đây là cơ sở cho HS vận dụng kiến thức hình học vào cuộc sống, qua đó giúp các em phát triển TTTKG và tư duy logic.

Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ GD-ĐT (2018) đã xác định, việc vận dụng kiến thức hình học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn cần đảm bảo một số yêu cầu sau: - Vận dụng được kiến thức về hai đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, phép chiếu song song, hai đường thẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc, khoảng cách trong không gian, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, góc nhị diện, hình chóp cụt đều,... để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn; - Vận dụng được các kiến thức về tọa độ của vectơ, phương trình mặt phẳng, phương trình đường thẳng trong không gian, phương trình mặt cầu để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Do đó, GV cần thiết kế các tình huống liên quan đến thực tiễn để HS vận dụng các kiến thức hình học như quan hệ song song, quan hệ vuông góc, phương pháp tọa độ trong không gian để giải quyết các vấn đề đặt ra.



Hình 4

Chẳng hạn, GV có thể cho HS giải bài tập sau đây: “Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều, có chiều cao 147m, cạnh đáy dài 230m. Hãy tính diện tích mặt bên và thể tích của nó”.

Với bài tập này, HS cần tìm kiếm hình ảnh thực tế của kim tự tháp Kheops từ các nguồn thông tin như internet, hình dung được hình dạng của kim tự tháp để phác họa hình vẽ mô tả dữ kiện thực tiễn đã cho. HS cần hình dung được đáy của nó là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau, chân đường cao trùng với tâm của đáy, đường cao của mặt bên đi qua trung điểm của cạnh đáy.

3. Kết luận

TTTTKG là một loại hoạt động trí óc đặc biệt mà HS cần có để học tập tốt nội dung hình học ở trường phổ thông và vận dụng vào cuộc sống. Trong bài báo, sau khi tìm hiểu và đưa ra được một số quan niệm về TTTKG, chúng tôi đã đề xuất một số định hướng trong dạy học nội dung Hình học nhằm rèn luyện TTTKG cho HS THPT, đó là: giúp HS xây dựng các biểu tượng không gian; sử dụng phép chiếu song song và phép chiếu vuông góc để biểu diễn hình học không gian chính xác, tạo cơ hội rèn luyện mối quan hệ giữa TTTKG và tư duy logic; vận dụng phối hợp ba phương pháp tổng hợp, phương pháp vector và phương pháp giải tích để xây dựng biểu tượng không gian theo các hình thái khác nhau, đưa ra các phán đoán, trực giác không gian; thiết kế các tình huống thực tiễn gắn với nội dung hình học để phát triển TTTKG và tư duy logic. Kết quả nghiên cứu cũng đưa ra được các ví dụ điển hình minh họa cho các luận điểm cũng như các định hướng đã đề xuất, qua đó giúp GV xác định được các dạng toán trong dạy học Hình học theo hướng rèn luyện TTTKG cho HS THPT.

Tài liệu tham khảo

- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT)*.
- Bùi Văn Huệ, Phan Thị Hạnh Mai, Nguyễn Xuân Thúc (2021). *Tâm lý học tiểu học*. NXB Đại học Sư phạm.
- Bùi Văn Nghị (2008). *Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
- Gardner, H. (2016). *Cơ cấu trí khôn* (Phạm Toàn dịch). NXB Tri thức.
- Hoàng Phê (chủ biên, 2003). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng.
- Korutecxki, V. A. (1981). *Những cơ sở của tâm lý học sư phạm* (tập 1, 2). NXB Giáo dục.
- Lê Thị Hoài Châu (2015). *Dạy học hình học ở trường phổ thông*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- Nguyễn Thị Xuân (2012). Phát triển năng lực tư duy và trí tưởng tượng không gian của học sinh tiểu học qua bài học toán về cắt - ghép hình. *Tạp chí Giáo dục*, 289, 42-44.
- Nikolxki, X. M. (chủ biên, 2010). *Từ điển bách khoa phổ thông toán học 1* (tập 1). NXB Giáo dục Việt Nam.
- Phạm Văn Hoàn (chủ biên, 1981). *Giáo dục học môn Toán*. NXB Giáo dục.
- Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (chủ biên), Khu Quốc Anh, Nguyễn Hà Thanh, Phan Văn Viện (2007). *Hình học 11*. NXB Giáo dục.
- Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (chủ biên), Khu Quốc Anh, Trần Đức Huyền (2008). *Hình học 12*. NXB Giáo dục.
- Vũ Thị Thái (2001). *Bước đầu hình thành và phát triển trí tưởng tượng không gian cho học sinh tiểu học thông qua dạy học các yếu tố hình học*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
- Xcatkin, M. H. (1982). *Lí luận dạy học ở trường phổ thông*. NXB Giáo dục Matxcova.