VJE Tạp chí Giáo dục (2024), 24(24), 53-58 ISSN: 2354-0753

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ "XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN" (TOÁN 12)

Cao Thị Hà[1,+], **Tạ Công Sơn**[2], **Phạm Đình Tùng**[2]

[1]Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội;
[2]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội
+ Tác giả liên hệ ● Email: caoha@vnu.edu.vn

Article history
Received: 02/9/2024
Accepted: 18/10/2024
Published: 20/12/2024

Keywords
Mathematical thinking and reasoning, conditional probability, Math 12, some measures

ABSTRACT
According to the 2018 General Education Curriculum for Mathematics, mathematical thinking and reasoning competency is one of the five mathematical competencies that need to be formed and developed for students in teaching Mathematics. In the 12th grade Mathematics syllabus, "Conditional probability" is a new and challenging content for students. However, as long as teachers employ appropriate teaching methods, there are plenty of opportunities to develop components of mathematical competency for students. The study specifically describes the manifestations of students' mathematical thinking and reasoning competency and proposes some measures to develop this competency for students in teaching the topic "Conditional probability". In order for the teaching process to develop students' mathematical thinking and reasoning competency effectively, teachers need to identify specific manifestations of competency in each specific teaching content, thereby choosing appropriate teaching activities as well as teaching forms and methods.

1. Mở đầu

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, năng lực tư duy và lập luận toán học (TD&LLTH) là một trong năm năng lực toán học cần hình thành và phát triển cho HS (Bộ GD-ĐT, 2018); do vậy, phát triển năng lực TD&LLTH cho HS có vai trò quan trọng trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông. Lí thuyết Xác suất và thống kê là một nhánh của khoa học toán học, liên quan đến quy luật chi phối các sự kiện ngẫu nhiên, bao gồm việc thu thập, phân tích, giải thích và hiển thị dữ liệu số. Lí thuyết này đang giữ vị trí quan trọng trong nhiều lĩnh vực và được ứng dụng rộng rãi. Cùng với sự phát triển mạnh mẽ của KH-CN, nhu cầu hiểu biết, sử dụng các công cụ ngẫu nhiên trong phân tích và xử lí thông tin ngày càng rất cần thiết (Tống Đình Quỳ, 2002; Cox & Efron, 2017). Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 đã đưa kiến thức Xác suất và thống kê là một trong ba mạch kiến thức mà HS cần phải học từ lớp 2 đến lớp 12 (Bộ GD-ĐT, 2018). Việc nghiên cứu để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS trong dạy học môn Toán đã được nhiều nghiên cứu trong và ngoài nước đề cập đến như: Phạm Thị Kim Châu (2022), Nguyễn Dương Hoàng và Nguyễn Thị Ngọc Hạnh (2023), Nguyễn Thị Kiều Nga (2024), Gonzalez và cộng sự (2021), Qomariyah và Darmayanti (2023),…; tuy nhiên, phát triển năng lực TD&LLTH cho HS trong dạy học Xác suất và thống kê, đặc biệt là chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12) chưa có nhiều nghiên cứu đề cập bởi đây là một chủ đề mới được đưa vào chương trình môn Toán lớp 12 hiện nay.

Bằng phương pháp phân tích và tổng hợp tài liệu, bài báo trình bày khái niệm "năng lực TD&LLTH", biểu hiện năng lực TD&LLTH của HS THPT trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12), từ đó đề xuất một số biện pháp phát triển năng lực này cho HS trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện".

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Năng lực tư duy và lập luận toán học

Theo Phạm Thị Kim Châu (2022), tư duy là một quá trình nhận thức phản ánh những thuộc tính bản chất, phát hiện ra tính quy luật của sự vật; lập luận là trình bày có lí lẽ và hệ thống để chứng minh cho kết luận về một vấn đề nào đó. Nghiên cứu cũng khẳng định, TD&LLTH có quan hệ mật thiết và biện chứng lẫn nhau, tư duy diễn ra trong suy nghĩ và bộc lộ ra bên ngoài thông qua ngôn ngữ, lập luận; lập luận là kết quả của quá trình tư duy. Mumcui và Akturk (2017) cho rằng, năng lực TD&LLTH gồm hai năng lực thành phần là năng lực tư duy toán học và năng lực lập luận toán học; là mục tiêu hướng tới của quá trình dạy học môn Toán vì khi có năng lực lập luận toán học, HS sẽ

biết vận dụng toán học vào giải quyết các vấn đề của thực tiễn. Gonzalez và cộng sự (2021) cho rằng, năng lực TD&LLTH là khả năng kết luận, phân tích, đánh giá, khái quát hóa, kết nối, tích hợp, tìm giải pháp cho các vấn đề.

Trong bài báo này, chúng tôi tiếp cận năng lực TD&LLTH theo hướng không tách rời mà là sự đan xen, liên hệ hữu cơ, biện chứng với nhau và thống nhất với quan điểm của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, coi năng lực TD&LLTH là một năng lực được thể hiện qua việc: (1) Thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa, tương tự; quy nạp, diễn dịch; (2) Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận; (3) Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học (Bộ GD-ĐT, 2018).

2.2. Biểu hiện năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12)

Từ những yêu cầu cần đạt trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12) và biểu hiện năng lực TD&LLTH của HS THPT theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ GD-ĐT (2018), chúng tôi đề xuất các biểu hiện năng lực TD&LLTH của HS THPT khi học tập chủ đề này như sau (xem bảng 1):

Bảng 1. Các biểu hiện của năng lực TD&LLTH của HS THPT khi học tập chủ đề "Xác suất có điều kiện"

Thành phần năng lực TD&LLTH	**Biểu hiện năng lực TD&LLTH của HS THPT**	**Biểu hiện năng lực TD&LLTH của HS THPT trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện"**
Thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa, tương tự; quy nạp, diễn dịch	Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát	(N1) Phân tích để xác định được các biến cố trong một phép thử và mối quan hệ giữa các biến cố đó; tính được xác suất có điều kiện và giải thích được ý nghĩa của nó. (N2) Vận dụng và giải thích được công thức tính xác suất có điều kiện trong trường hợp các biến cố là độc lập với nhau và xác suất của mỗi biến cố đó là không âm từ công thức xác suất có điều kiện. (N3) Giải thích được công thức nhân xác suất và ý nghĩa của công thức đó.
Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận	Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề	(N4) Lập luận và chỉ ra được bối cảnh để sử dụng công thức xác suất toàn phần hay công thức Bayes.
Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học	Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề. Giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện toán học	(N5) Chứng minh được công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes. (N6) Lập luận để xây dựng được sơ đồ hình cây, tính xác suất có điều kiện. (N7) Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết bài toán liên quan đến xác suất có điều kiện.

2.3. Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học của học sinh trung học phổ thông trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12)

2.3.1. Hướng dẫn học sinh lập luận để suy đoán và chứng minh một số công thức xác suất trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12)

* *Mục đích của biện pháp*: Chủ đề "Xác suất có điều kiện" chứa đựng trong nhiều tình huống thực tế mà để giải quyết các tình huống này lại cần sử dụng công thức xác suất; có nhiều cơ hội giúp HS phát triển năng lực TD&LLTH thông qua việc xây dựng, thực hiện các phép tính toán, dự đoán và chứng minh công thức xác suất có điều kiện, công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes. Do vậy, biện pháp này hướng đến phát triển cho HS các biểu hiện (N1), (N2), (N3), (N5) của năng lực TD&LLTH.

* *Cách thức thực hiện biện pháp:* Xuất phát từ khái niệm xác suất có điều kiện, GV hướng dẫn HS sử dụng các phép tương tự hóa, đặc biệt hóa, khái quát hóa cũng như quy tắc suy luận để dự đoán, chứng minh công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes.

Ví dụ 1: Xây dựng công thức hệ quả và công thức nhân xác suất từ công thức xác suất có điều kiện.

Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện như sau: Cho hai biến cố *A* và *B*. Xác suất của biến cố A tính trong điều kiện biến cố *B* đã xảy ra, được gọi là xác suất của *A* với điều kiện *B* và kí hiệu là *P(A/B).* Nếu *P(B)* > 0 thì: $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ (1), GV đặt câu hỏi: *Xét trường hợp đặc biệt, nếu A và B là hai biến cố độc lập và* $P(A)>0, P(B)>0$ *thì công thức (1) sẽ thay đổi thế nào?*

Câu trả lời mong đợi: Do A và B là hai biến cố độc lập nên $P(AB)=P(A)P(B)$. Mặt khác, theo giả thiết ta có: $P(B)>0$ nên $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A).$

Tiếp đó, GV hướng dẫn HS xét trường hợp tương tự, từ công thức (1) và với giả thiết $P(A)>0$, ta có:

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(\mathrm{A})}=\frac{P(B)P(\mathrm{A})}{P(A)}=P(B)$$

GV đặt câu hỏi: Từ các công thức đã biết, chứng minh công thức: $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}$. Hãy xét công thức vừa chứng minh được trong trường hợp A và B là hai biến cố độc lập.

Câu trả lời mong đợi: Bằng cách thay đổi vai trò của A và $\overline{A}$, từ công thức (1), ta có $P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}$. Trong trường hợp A và B là hai biến cố độc lập, khi đó: $P(\overline{A}|B)=P(\overline{A});\ P(\overline{B}|\mathrm{A})=P(\overline{B}).$ Sử dụng phép biến đổi tương đương, từ công thức (1) ta thu được: $P(AB)=P(B)P(A|B)$ (2).

GV đặt câu hỏi: Công thức (2) luôn đúng cho hai biến cố bất kì A và B, được gọi là công thức nhân xác suất. Em hãy sử dụng các tính chất của tích hai biến cố để chứng tỏ rằng: $P(AB)=P(\mathrm{A})P(B|\mathrm{A})(3)$.

Câu trả lời mong đợi: Áp dụng công thức (1): $P(BA)=P(A).P(B/A)$, theo tính chất giao hoán của tích hai biến cố, tức là $AB=BA$ nên $P(AB)=P(BA)$. Do vậy: $P(AB)=P(\mathrm{A})P(B|\mathrm{A})$. Công thức (2), (3) cho phép ta tính xác suất của tích hai biến cố khi biết xác suất có điều kiện.

Như vậy, HS đã chứng minh được các công thức (2) và (3) xuất phát từ công thức (1). Để xây dựng được các công thức này, HS cần sử dụng các thao tác tư duy như phép tương tự hóa, phép đặc biệt hóa, phép biến đổi tương đương, đồng thời sử dụng quy tắc suy luận $\frac{A\to B, A}{B}$. Nói cách khác, việc xây dựng các công thức tính xác xuất trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" là cơ hội thuận lợi để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS.

2.3.2. Hướng dẫn học sinh sử dụng sơ đồ hình cây trong giải các bài toán chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12)

** Mục đích của biện pháp:* Sơ đồ hình cây là một công cụ khá hữu ích để giúp HS giải toán xác suất và thống kê do các dữ kiện của bài toán được trực quan hóa. Điểm cơ bản trong việc sử dụng sơ đồ hình cây khi giải các bài toán là HS cần hiểu nội dung bài toán, biết phân tích để mô tả đúng sơ đồ hình cây cũng như biểu diễn được số liệu mà bài toán đã cho trên các nhánh của sơ đồ và suy luận để tìm câu trả lời cho bài toán. Do vậy, sử dụng sơ đồ hình cây trong dạy học giải các bài toán chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12) có nhiều cơ hội để phát triển cho HS các thành tố (N1), (N6), (N7) của năng lực TD&LLTH.

** Cách thức thực hiện biện pháp:* Biện pháp này có thể được thực hiện theo các giai đoạn sau: - Giai đoạn 1: GV phân tích mẫu một số ví dụ cho HS hiểu cách làm; - Giai đoạn 2: GV đưa ra bài toán, yêu cầu HS lựa chọn được sơ đồ hình cây phù hợp và độc lập giải bài toán bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây.

Để thực hiện biện pháp này, trong giai đoạn 1, GV đưa ra bài toán sau:

Ví dụ 2: Một phòng học môn Tin học có 40 máy tính, được đánh số từ 1 đến 40, các máy tính là cùng loại và cùng màu, mỗi máy được đánh một số khác nhau. Trong phòng học đó, xác suất để chọn được một máy tính đã cài đặt phần mềm lập trình Python được đánh số chẵn và được đánh số lẻ lần lượt là 0,375 và 0,45. Bạn Nam chọn ngẫu nhiên một máy tính trong phòng học đó. Vậy xác suất để bạn Nam chọn được máy tính đã cài đặt phần mềm lập trình Python, biết rằng máy tính đó được đánh số lẻ là bao nhiêu? (Đỗ Đức Thái và cộng sự, 2024).

GV có thể hướng dẫn HS giải bài toán này thông qua các câu hỏi gợi ý sau:

Câu hỏi 1: Để giải các bài toán về xác suất, đầu tiên ta cần đặt tên cho các biến cố. Trong bài toán này có 2 "hành vi", đó là: "đánh số cho máy tính" và "cài đặt phần mềm lập trình Python cho máy tính". Do vậy, ta xét hai biến cố sau: A: "máy tính được cài đặt phần mềm lập trình Python"; B: "máy tính được đánh số lẻ". Khi đó, xác suất để máy tính được chọn đã cài đặt phần mềm lập trình Python, biết rằng máy tính đó được đánh số lẻ là yêu cầu tính xác suất có điều kiện hay xác suất của giao hai biến cố?

Câu trả lời mong đợi: Đây là bài toán tính xác suất có điều kiện, cần tính $P(\mathrm{A} \mid B)$.

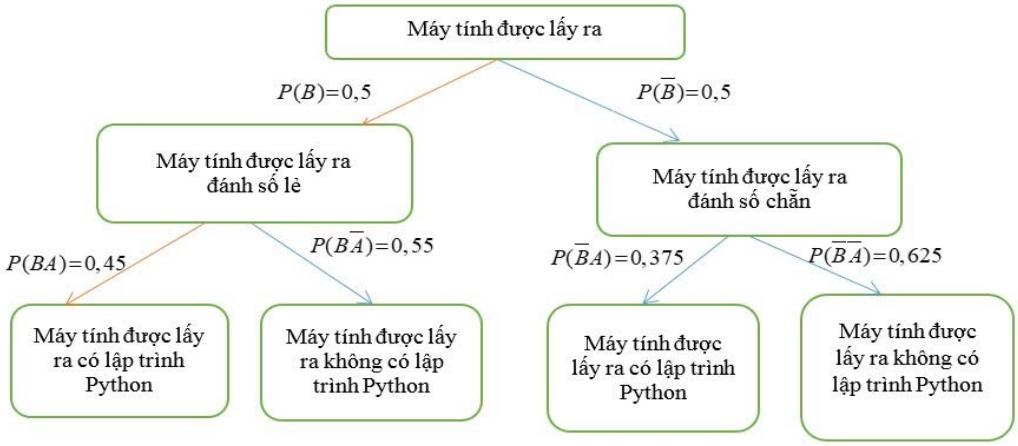
Câu hỏi 2: Do các máy tính được đánh số từ 1 đến 40 và mỗi máy tính được đánh một số khác nhau nên: $P(B) = ?; P(\overline{B}) = ?$

Câu trả lời mong đợi: Từ 1 đến 40 có 20 số chẵn và 20 số lẻ nên: $P(B) = P(\overline{B}) = 0{,}5$.

Câu hỏi 3: Hãy giải thích các số liệu 0,45 và 0,375 mà bài toán đã cho?

Câu trả lời mong đợi: Theo cách đặt các biến cố thì từ giả thiết của bài toán, ta có $P(BA) = 0{,}45$ nên $P(B\overline{A}) = 0{,}55$. Tương tự: $P(\overline{B}A) = 0{,}375$ nên $P(\overline{B}\overline{A}) = 0{,}625$.

Ta có sơ đồ hình cây biểu thị cách tính xác suất có điều kiện $P(\mathrm{A} \mid B)$ như sau (xem sơ đồ 1):



Sơ đồ 1. Sơ đồ hình cây biểu thị cách tính xác suất có điều kiện $P(\mathrm{A} \mid B)$

Dựa vào sơ đồ hình cây, HS sẽ tính được: $P(\mathrm{A} \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(BA)}{P(B)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}5} = 0{,}9$.

Vậy, xác suất để bạn Nam chọn được máy tính đã cài đặt phần mềm Python, biết rằng máy tính đó được đánh số lẻ là 0,9. Như vậy, việc GV đặt các câu hỏi định hướng vừa giúp HS phân tích được mối quan hệ và ý nghĩa của các dữ kiện trong bài toán, vừa vận dụng được những kiến thức đã biết để suy luận, dẫn đến các dữ kiện mới và hoàn thành được lời giải bài toán.

Sau khi hướng dẫn HS giải được ví dụ 2, trong giai đoạn 2, GV yêu cầu HS giải bài toán sau:

Ví dụ 3: Trong một cuộc khảo sát tình trạng công việc của 900 người gồm cả nam và nữ đã có bằng tốt nghiệp THPT ở một địa phương, người ta thu được số liệu như bảng sau (Lê Thị Hoài Châu và cộng sự, 2024) (xem bảng 2):

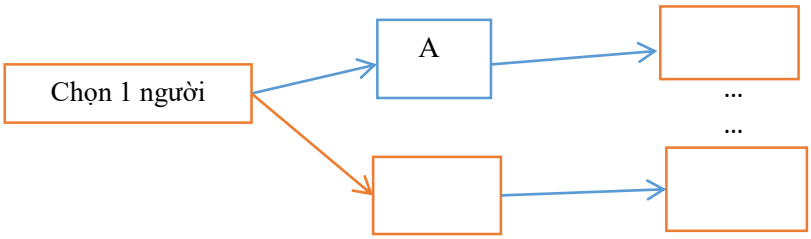
Bảng 2. Số liệu khảo sát tình trạng công việc

Tình trạng / Giới tính	Có việc làm	Không có việc làm
Nam	460	40
Nữ	140	260

Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm, gọi A là biến cố "Người được chọn là nữ", B là biến cố "Người được chọn có việc làm". Em hãy hoàn thành sơ đồ hình cây sau đây, xác định xác suất của các biến cố trên mỗi nhánh của sơ đồ và tính xác suất để người được chọn là nữ biết rằng người đó đã có việc làm (xem sơ đồ 2).

Với bài toán này, HS cần dựa trên các gợi ý của GV đã thực hiện trong ví dụ 2 để phân tích, tìm ra những điểm tương đồng của bài toán với bài toán trong ví dụ 2, tự hoàn thiện sơ đồ hình cây cũng như các yêu cầu khác của bài toán. Do vậy, qua ví dụ 2, GV sẽ rèn luyện cho HS kĩ năng phân tích, khả năng tìm ra sự tương đồng, khác biệt giữa các bài toán để có thể vận dụng kiến thức và kĩ năng đã biết vào giải quyết bài toán mới.

2.3.3. Giúp học sinh nhận dạng được các dạng bài toán để vận dụng công thức xác suất phù hợp



Sơ đồ 2. Tính xác suất của các biến cố trên mỗi nhánh của sơ đồ

* *Mục đích của biện pháp:* Trong chủ đề "Xác suất có điều kiện" ở trường THPT, các bài toán yêu cầu sử dụng công thức xác suất có điều kiện thường được diễn đạt theo cấu trúc như "tính xác suất để ... khi … ", " tính xác suất để … biết rằng …" hay "tính xác suất … trong điều kiện …" nên HS dễ dàng nhận dạng được bài toán. Công thức xác suất toàn phần giúp người học tính xác suất của một biến cố thông qua việc chia không gian mẫu thành các phần không giao nhau, mỗi phần tương ứng với một biến cố đơn lẻ, công thức này được biểu diễn qua tổng xác suất của biến cố xảy ra dưới từng điều kiện riêng biệt. Công thức Bayes cho phép chúng ta đánh giá lại xác suất của một sự kiện khi có thêm thông tin mới, từ đó cập nhật xác suất tiên nghiệm dựa trên thông tin mới thu thập được. Dấu hiệu để HS nhận diện được cần sử dụng công thức Bayes là khi đã cho xác suất của biến cố ở đề bài, nhưng có thêm thông tin mới và cần cập nhật lại xác suất của biến cố đó. Việc HS nhận dạng được công thức xác suất phù hợp cho mỗi bài toán đặt ra đã giúp các em hình thành và phát triển được các biểu hiện (N4), (N7) của năng lực TD&LLTH.

* *Cách thức thực hiện biện pháp:* Để giúp HS có thể vận dụng được các công thức phù hợp khi giải các bài toán thuộc chủ đề "Xác suất có điều kiện, GV cần tập luyện cho HS: (1) Phân tích các giả thuyết của bài toán: Việc xác định chính xác và phân tích các giả thuyết ban đầu về xác suất là rất quan trọng, bởi sẽ là tiền đề để HS nhận thấy bài toán có thể giải được bằng các công thức xác suất phù hợp; (2) Xác định rõ ràng cấu trúc của không gian mẫu và các biến cố: Để áp dụng đúng các công thức tính xác suất, trước hết cần xác định rõ biến cố đơn lẻ, xung khắc hợp thành không gian mẫu và biến cố cần tính xác suất. Do vậy, HS cần đọc kĩ bài toán để hiểu rõ bản chất và định nghĩa của từng biến cố trong bối cảnh cụ thể; (3) Kiểm tra các giả thuyết ban đầu: Việc xác định chính xác các giả thuyết ban đầu về xác suất là rất quan trọng và là tiền đề để ta nhận thấy bài toán có thể giải được bằng công thức xác suất phù hợp. Đối với công thức xác suất toàn phần, dấu hiệu nhận biết là yêu cầu tính xác suất của biến cố độc lập hoặc hệ biến cố đầy đủ; (3) Tính toán chính xác: Cần đảm bảo rằng dữ liệu và giả định sử dụng cho các phép tính toán là chính xác và cập nhật, bởi sai sót trong dữ liệu có thể dẫn đến kết quả tính toán sai.

Ví dụ 4: Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỉ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%.

a) Nếu ta gặp một cư dân của xã thì xác suất để người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là bao nhiêu?

b) Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất để người đó có hút thuốc là bao nhiêu? (Lê Thị Hoài Châu và cộng sự, 2024).

GV cần hướng dẫn HS phân tích để giải bài toán này thông qua các bước sau:

(1) Phân tích giả thuyết của bài toán và xác định rõ ràng các biến cố: Trong bài toán này có chứa các dữ kiện: "Có hút thuốc lá", "Không hút thuốc lá", "Có vấn đề sức khỏe về đường hô hấp", "Không có vấn đề sức khỏe về đường hô hấp" và "Có vấn đề sức khỏe về đường hô hấp" là hệ quả của việc "Có hút thuốc lá". Gọi A là biến cố "Người đó có hút thuốc lá", B là biến cố "Người đó có vấn đề sức khỏe về đường hô hấp", khi đó cần tính $P(\mathrm{B})$ và $P(\mathrm{A}\backslash \mathrm{B})$.

(2) Kiểm tra các giả thuyết ban đầu: Theo bài ra ta có 20% cư dân hút thuốc lá, điều đó có nghĩa là $P(\mathrm{A})=0,2$ nên $P(\overline{A})=0,8$. Trong số những người có hút thuốc lá thì tỉ lệ mắc bệnh là 70%, điều đó có nghĩa là $P(\mathrm{B}\mid \mathrm{A})=0,7$; trong số những người không hút thuốc lá thì tỉ lệ mắc bệnh là 15%, điều đó có nghĩa là $P(\mathrm{B}\mid \overline{A})=0,15$. Dễ thấy $\Omega=A\cup\overline{A}$ nên có thể tính $P(\mathrm{B})$ qua công thức xác suất toàn phần. Khi đó ta có: $P(\mathrm{B})=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})$. Do $P(A)P(B\mid A)$ và $P(B)$ đã tính được, nên để tính $P(\mathrm{A}\backslash \mathrm{B})$, cần vận dụng công thức Bayes: $P(\mathrm{A}\backslash \mathrm{B})=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}$.

(3) Tính toán chính xác: HS cần tính đúng các xác suất sau: *P(A)*; $P(\overline{A})$; $P(B/A)$; $P(B/\overline{A})$; *P(B)*; $P(A/B)$.

Sau khi giải bài toán, GV có thể giúp HS phát triển các năng lực như phán đoán, tổng quát hóa, khái quát hóa và đề xuất các bài toán mới.

3. Kết luận

Việc phát triển các năng lực toán học cho HS là trọng tâm của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Do vậy, với mỗi nội dung dạy, GV cần xác định xem nội dung này có tiềm năng để phát triển những năng lực thành tố nào của năng lực toán học và làm thế nào để hình thành năng lực toán học cho HS. Bài báo đã phân tích, làm rõ tiềm năng để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS trong dạy học chủ đề "Xác suất có điều kiện" (Toán 12) thông qua việc mô tả rõ các biểu hiện của năng lực này của HS THPT và đề xuất một số biện pháp sư phạm. Chúng tôi sẽ tiếp tục triển khai thực nghiệm để đánh giá và điều chỉnh, cũng như tìm hiểu thực trạng năng lực TD&LLTH của HS THPT trong những nghiên cứu tiếp theo.

Tài liệu tham khảo

Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

Cox, D. R., & Efron, B. (2017). Statistical thinking for 21st century scientists. *Science Advances*, *3*(6), e1700768.

Đỗ Đức Thái (chủ biên, 2024). *Toán 12* (tập 2). NXB Đại học Sư phạm.

Gonzalez, A., Gallego-Sanchez, I., Gavilan-Izquierdo, J. M., & Puertas, M. L. (2021). Characterizing Levels of Reasoning in Graph Theory. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*(8). https://doi.org/10.29333/ejmste/11020

Lê Thị Hoài Châu (chủ biên, 2024). *Toán 12* (tập 2). NXB Đại học Huế.

Mumcui, H. Y., & Akturk, T. (2017). An analysis of the reasoning skills of pre-service teachers in the context of mathematical thinking. *European Journal of Education Studies*, *3*(5), 225-254.

Nguyễn Dương Hoàng, Nguyễn Thị Ngọc Hạnh (2023). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận cho học sinh lớp 12 thông qua dạy học thể tích khối đa diện. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, *12*(02S), 38-47. https://doi.org/10.52714/dthu.12.02S.2023.1082

Nguyễn Thị Kiều Nga (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học giải các bài toán chủ đề "Đa thức" ở trung học cơ sở. *Tạp chí Giáo dục, 24*(12), 6-10.

Phạm Thị Kim Châu (2022). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 4 thông qua dạy học môn Toán. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, *12*(01S), 46-55.

Qomariyah, S., & Darmayanti, R. (2023). Development of High School Students' Mathematical Reasoning Ability Instruments on Three Dimension Material. *Journal of Mathematics and Science Education*, *11*(1), 249-260.

Tống Đình Quỳ (2004). *Giáo trình xác suất thống kê*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.