

SỬ DỤNG BIỂU DIỄN TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC “GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM” (TOÁN 11)

Nguyễn Phú Lộc^{1,+},
Nguyễn Thị Mơ²

¹Trường Đại học Cần Thơ;

²Học viên cao học K29, Trường Đại học Cần Thơ

+ Tác giả liên hệ • Email: nploc@ctu.edu.vn

Article history

Received: 26/9/2024

Accepted: 07/11/2024

Published: 05/01/2025

Keywords

Use, mathematical representation, limit of function at a point, math 11

ABSTRACT

The concept of “the Limit of a function” is a fundamental element in the high school mathematics curriculum and serves as an important premise for a deeper understanding of topics such as “Continuous functions” and “Derivatives and Integrals”. However, the abstractness and complexity of limits often cause great difficulties for 11th grade students. To overcome these difficulties, the use of mathematical representations in teaching is considered an effective measure. The study proposes a process of using mathematical representations in teaching mathematics and applying it to teaching the concept of “Finite limit of a function at a point” (Mathematics 11). The aim is not only to help students deeply understand this concept, but also to improve their ability to apply it to solving relevant problems. The application of the mathematical representation process is not only effective in teaching mathematics, but also opens up the possibility of application in other natural sciences.

1. Mở đầu

“Giới hạn của hàm số” là một nội dung quan trọng trong chương trình môn Toán ở THPT, là kiến thức nền tảng để HS học tập các nội dung như “Hàm số liên tục”, “Đạo hàm” và “Tích phân”,... Tuy nhiên, do tính trừu tượng của kiến thức về giới hạn của hàm số nên HS thường gặp nhiều khó khăn khi học nội dung này. Để giúp HS vượt qua những thách thức trong học tập, nắm vững các kiến thức toán học trừu tượng, việc sử dụng biểu diễn toán học (BDTH) trong dạy học được coi là một biện pháp hiệu quả. Quá trình BDTH bao gồm việc sử dụng các hình thức biểu diễn khác nhau như đồ thị, biểu thức đại số, bảng số liệu và mô tả bằng lời để giúp HS nhận biết và kết nối các dữ kiện toán học. Nhiều nghiên cứu đã khẳng định vai trò của BDTH như là các công cụ giúp HS nâng cao sự hiểu biết về các khái niệm toán học (Putra et al., 2023); giúp GV sử dụng biểu diễn trực quan dưới dạng sơ đồ, đồ họa và mô hình vật lý trong dạy học giải bài tập toán (Ma, 2023); rèn luyện cho HS kỹ năng chuyển đổi giữa các hình thức BDTH (Mainali, 2020); khuyến khích GV kết hợp các phương tiện trực quan như biểu đồ và đồ thị, trải nghiệm thực tế khi dạy học các khái niệm thống kê (Trần Đức Thuận và cộng sự, 2022); các mô hình trực quan đặc biệt hiệu quả trong dạy học phân số ở tiểu học, giúp HS nắm vững ý nghĩa của phân số (Lê Thị Hoài Châu & Nguyễn Lâm Hồng Thắm, 2018); biết vận dụng BDTH vào quá trình giải quyết vấn đề (Ngô Trúc Phương, 2019). Việc sử dụng BDTH trong dạy học môn Toán có thể nâng cao hiểu biết và sự tham gia của HS trong học tập. Các chiến lược BDTH đa dạng, bao gồm học tập theo trải nghiệm, mô hình trực quan và công cụ kỹ thuật số, có thể cải thiện đáng kể hiệu quả dạy học môn Toán với nhiều chủ đề ở các cấp học khác nhau (Nguyễn Minh Hậu & Huỳnh Thị Lựu, 2018).

Mặc dù vai trò của BDTH trong dạy học đã được khẳng định qua nhiều nghiên cứu, nhưng việc vận dụng vào dạy học các khái niệm về giới hạn hàm số theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 cho HS THPT còn chưa được triển khai rộng rãi. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất quy trình sử dụng BDTH trong dạy học môn Toán và minh họa quy trình này trong dạy học khái niệm “Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm” (Toán 11), với mục tiêu là không chỉ nâng cao hiệu quả dạy học, hiểu biết của HS về khái niệm này mà còn cải thiện khả năng ứng dụng và giải quyết các vấn đề liên quan.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Quan niệm về biểu diễn toán học

BDTH là sự trình bày một nội dung toán học bằng các thuật ngữ, kí hiệu, biểu tượng (Ngô Trúc Phương, 2019). BDTH là một thao tác quan trọng trong dạy học môn Toán, bao gồm việc sử dụng nhiều hình thức khác nhau để diễn đạt ý tưởng toán học, nâng cao sự hiểu biết của HS; là cách thức sử dụng kí hiệu, hình vẽ, ngôn ngữ tự nhiên hoặc

các phương tiện khác để biểu diễn một khái niệm, quy luật, vấn đề toán học hoặc một mối liên hệ toán học nào đó. Nói cách khác, BDTH là một “bản dịch” từ ngôn ngữ toán học trừu tượng sang một hình thức cụ thể, dễ hiểu hơn.

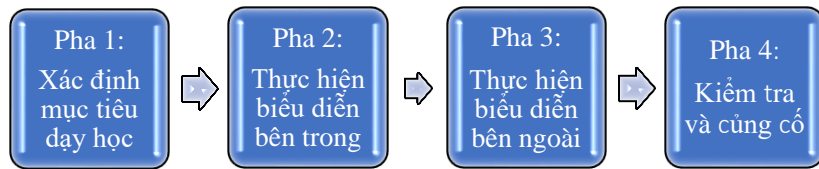
BDTH diễn ra thông qua hai giai đoạn: biểu diễn bên trong và biểu diễn bên ngoài (Dilworth, 2004; Fiantika, 2017). Biểu diễn bên trong còn được gọi là biểu diễn tinh thần, diễn ra trong tâm trí con người; biểu diễn bên ngoài bao gồm lời nói, bản vẽ và các đối tượng cụ thể, được sử dụng để mô tả, giải thích và truyền đạt ý tưởng toán học (Fiantika, 2017). Bốn loại biểu diễn bên ngoài thường được sử dụng là: thuần ngôn ngữ, đồ thị, hình ảnh, kí hiệu và số (Mainali, 2020; Musrikah et al., 2023). Trong dạy học môn Toán, GV có thể chọn các dạng biểu diễn bên ngoài sau đây: (1) Biểu diễn bằng ngôn ngữ: Sử dụng từ ngữ, câu văn để mô tả khái niệm và quá trình toán học; (2) Biểu diễn bằng hình ảnh, biểu đồ: Sử dụng hình vẽ, đồ thị, sơ đồ để mô tả mối quan hệ giữa các tri thức toán học; (3) Biểu diễn bằng kí hiệu: Sử dụng kí hiệu toán học để biểu diễn các công thức, phương trình và mối liên hệ giữa các yếu tố; (4) Biểu diễn bằng bảng: Sử dụng bảng số liệu để sắp xếp, tổ chức dữ liệu và đưa ra kết quả; (5) Biểu diễn bằng mô hình hình học: Sử dụng các hình hình học như đường thẳng, đường cong, hình vuông, hình tròn, ... để minh họa các khái niệm hoặc mối quan hệ toán học; giúp HS thể hiện ý tưởng toán học và giải quyết vấn đề hiệu quả.

2.2. Quy trình sử dụng biểu diễn toán học trong dạy học môn Toán

Dựa vào quan niệm về biểu diễn bên trong và biểu diễn bên ngoài như đã trình bày ở tiểu mục 2.1, chúng tôi đề xuất quy trình sử dụng BDTH trong dạy học môn Toán với mục tiêu là giúp HS nâng cao hiểu biết về tri thức toán học thông qua các cách biểu diễn khác nhau. Quy trình gồm bốn pha như sau (xem sơ đồ 1):

Pha 1: Xác định mục tiêu BDTH. Xác định rõ vị trí của tri thức cần dạy trong chương trình, mục tiêu của các BDTH.

Pha 2: Thực hiện biểu diễn bên trong. Phân tích nội dung tri thức: Xác định rõ đặc điểm của tri thức, liên kết với tri thức liên quan đã học; sử dụng các kí hiệu đơn giản, dễ nhớ.



Sơ đồ 1. Quy trình sử dụng BDTH trong dạy học môn Toán

Pha 3: Thực hiện biểu diễn

bên ngoài. Tùy theo từng nội dung kiến thức, GV có thể chọn các hình thức biểu diễn bên ngoài thích hợp. Trong mỗi BDTH, GV cần giải thích chi tiết, làm rõ các bước suy luận, mối quan hệ giữa các yếu tố trong biểu diễn; từ đó giúp HS hiểu ý nghĩa của BDTH và cách vận dụng BDTH vào giải bài toán thực tế.

Pha 4: Kiểm tra và củng cố. GV đưa ra các câu hỏi để kiểm tra mức độ nắm vững kiến thức của HS về tri thức toán vừa học sau khi đã sử dụng BDTH. Tiếp đó, GV yêu cầu HS thực hành, khuyến khích các em tự tạo ra các BDTH tương tự hoặc giải các bài tập liên quan để củng cố kiến thức.

2.3. Sử dụng biểu diễn toán học trong dạy học khái niệm “Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm” (Toán 11)

Đối với một khái niệm toán học, biểu diễn bên trong liên quan đến việc phân tích bản chất của khái niệm, tìm ra các thuộc tính, mối quan hệ và cấu trúc bên trong; biểu diễn bên ngoài là cách thể hiện khái niệm đó ra bên ngoài thông qua các hình thức cụ thể như biểu đồ, công thức, mô hình, ngôn ngữ tự nhiên, ... Trong bài báo này, chúng tôi dựa trên cách tiếp cận khái niệm “Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm” được trình bày trong sách giáo khoa Toán 11 - Bộ kết nối tri thức với cuộc sống của Hà Huy Khoái và cộng sự (2023) để vận dụng quy trình BDTH vào dạy học khái niệm này. Sau đây, chúng tôi sử dụng BDTH vào dạy học khái niệm “Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm” (Toán 11) theo quy trình đề xuất ở tiểu mục 2.2:

Pha 1: Xác định mục tiêu của BDTH. “Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm” là một khái niệm thuộc chủ đề “Giới hạn. Hàm số liên tục” trong chương trình sách giáo khoa Toán 11. Khái niệm này được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số. Sử dụng các hình thức BDTH để giúp HS lĩnh hội khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm một cách trực quan, xét khái niệm dưới nhiều góc độ khác nhau.

Pha 2: Thực hiện biểu diễn bên trong. Đầu tiên, GV cho HS xét hàm số $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$. Hàm số này có đặc điểm là với dãy số (x_n) bất kì, sao cho $x_n \neq 2$ và $x_n \rightarrow 2$, luôn có $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -4$. GV sẽ giới thiệu cho HS biết vì hàm số $f(x)$ có tính chất như vậy nên ta nói rằng $f(x)$ dần đến -4 khi x dần đến 2 , hay $f(x)$ có giới hạn là -4 khi x dần đến 2 . Tiếp theo, GV phát biểu khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm: *Giả sử $(a;b)$ là một khoảng*

chứa điểm x_0 và hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ điểm x_0 . Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$ (Hà Huy Khoái và cộng sự, 2023).

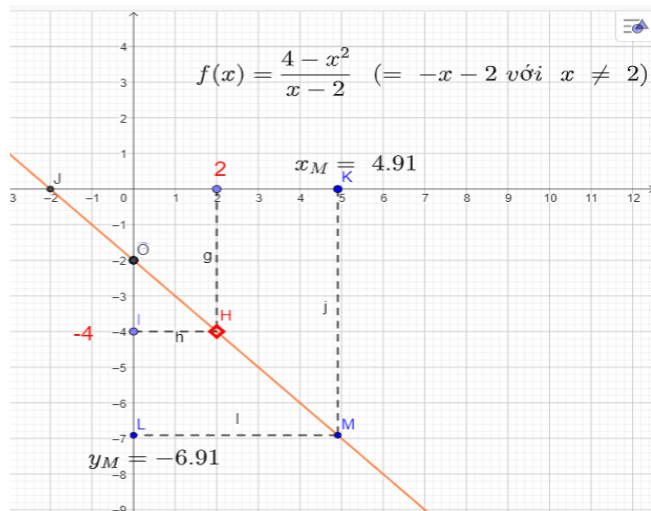
Từ định nghĩa, GV có thể đưa ra một số nhận xét như sau: (1) Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 không nhất thiết phải xác định tại x_0 ; (2) Trong trường hợp hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và có giới hạn là L khi x dần tới x_0 thì L có thể bằng $f(x_0)$ hoặc có thể không bằng $f(x_0)$.

Pha 3: Thực hiện biểu diễn bên ngoài. GV hướng dẫn cho HS thực hiện các biểu diễn bên ngoài thông qua các nhiệm vụ sau:

Nhiệm vụ 1: Biểu diễn giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$ khi x dần đến 2 bằng đồ thị.

GV có thể sử dụng phần mềm GeoGebra biểu diễn mối quan hệ giữa L và $f(x_0)$ nhằm giúp HS hiểu rõ các trường hợp xảy ra đối với hàm số có giới hạn tại một điểm trong trường hợp $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$.

(xem hình 1). Hình 1 được tạo trên phần mềm GeoGebra cho phép trực quan hóa khái niệm giới hạn của hàm số khi x dần tới 2 và giá trị giới hạn của hàm số tiến dần tới -4. Phần mềm GeoGebra với khả năng tương tác cao, giúp HS hiểu sâu sắc hơn khái niệm này thông qua các yếu tố sau: (1) Đồ thị hàm số $f(x)$ biểu diễn hàm số $f(x)$ trên mặt phẳng tọa độ, với điểm $x = 2$ được đánh dấu và thể hiện rõ ràng. Khi GV di chuyển điểm K trên Ox về phía điểm có tọa độ $(2; 0)$, HS sẽ thấy giá trị hàm số tiến dần tới -4; (2) Điểm tiếp cận: Phần mềm GeoGebra đã hiển thị điểm $(2; -4)$ một cách nổi bật, minh họa rõ ràng khi x tiến gần đến 2, giá trị của hàm số $f(x)$ dần tiến tới -4. Điều này biểu thị cho $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$.



Hình 1. Hình biểu diễn cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{x-2} = -4$

Hình biểu diễn giới hạn của hàm số trên phần mềm GeoGebra cung cấp một cái nhìn trực quan, sinh động về khái niệm giới hạn. Việc sử dụng phần mềm động GeoGebra không chỉ hỗ trợ trong việc giải thích mà còn cho phép HS tự khám phá, thực hành và kiểm chứng các khái niệm toán học. Điều này làm tăng tính hiệu quả trong dạy học, đặc biệt là dạy học các khái niệm trừu tượng như giới hạn của hàm số. Với sự minh họa rõ ràng và khả năng tương tác cao giúp cho khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm trở nên dễ hiểu hơn, HS hiểu được bản chất của khái niệm thông qua hình ảnh trực quan và trải nghiệm thực.

Nhiệm vụ 2: Biểu diễn giới hạn của hàm số $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$ khi x dần đến 2 bằng bảng giá trị (xem bảng 1).

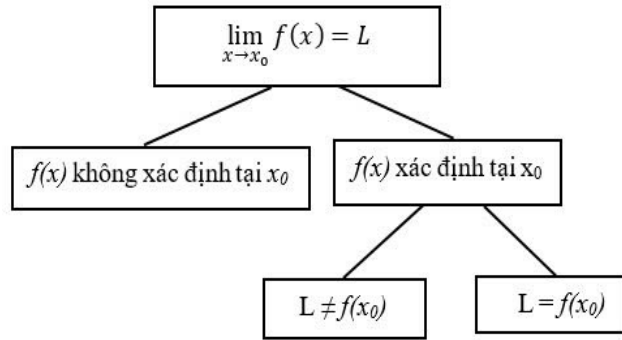
Bảng giá trị trong bảng 1 biểu diễn giá trị của hàm số $f(x)$ tương ứng với các giá trị của x khi x tiến gần đến 2 từ hai phía. Dựa vào bảng này, HS có thể dự đoán rằng, giá trị của hàm số $f(x)$ dần đến -4 khi x dần tới 2 dù hàm số không xác định tại $x = 2$ (thể hiện bởi dấu "?"). Bảng 1 cung cấp một cách tiếp cận trực quan cho khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm, bởi HS dễ dàng nhận thấy khi x tiến gần đến 2 thì $f(x)$ tiến gần đến -4. Đây là một cách tiếp cận rất hữu ích trong dạy học khái niệm giới hạn, đặc biệt khi hàm số có thể không xác định tại điểm cần xét.

Bảng 1. Bảng giá trị của hàm số $f(x)$

x	f(x)	x	f(x)
1.2	-3.2	1.6	-3.6
1.4	-3.4	1.7	-3.7
1.6	-3.6	1.8	-3.8
1.8	-3.8	1.9	-3.9
2	?	?	?
2.2	-4.2	2.1	-4.1
2.4	-4.4	2.2	-4.2
2.6	-4.6	2.3	-4.3
2.8	-4.8	2.4	-4.4
3	-5	2.5	-4.5

Nhiệm vụ 3: Biểu diễn các trường hợp liên quan đến giá trị giới hạn và giá trị của hàm số. Nhiều nghiên cứu cho thấy, HS thường gặp khó khăn trong việc hiểu khái niệm giới hạn trong giải tích. Những sai lầm phổ biến bao gồm việc coi giới hạn là không thể đạt được, tức là $f(x)$ chỉ dần tới L khi x dần về x_0 nhưng không bao giờ bằng L (Denbel, 2014). HS thường giải thích giới hạn theo cách “động”, cho rằng một hàm số tiến gần đến nhưng không bao giờ đạt được giá trị giới hạn của nó. Nhiều HS cũng nhầm lẫn rằng, một hàm số cần được xác định tại một điểm để có giới hạn tại điểm đó. Để giải quyết những vấn đề này, GV cần tập trung vào việc phát triển kiến thức về khái niệm cho HS trước khi giới thiệu các kỹ thuật giải bài toán, nhận biết được những sai lầm của HS để điều chỉnh chiến lược dạy học cho phù hợp. Sơ đồ 2 cho biết mối liên hệ giữa giới hạn của hàm số $f(x)$ với $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, có phân

tách các trường hợp dựa trên việc hàm số $f(x)$ có xác định tại x_0 hay không và mối quan hệ giữa giá trị giới hạn L với giá trị của hàm số tại x_0 . Thông qua sơ đồ 2 giúp HS phân loại rõ ràng các tình huống khác nhau khi học khái niệm về giới hạn, cung cấp cho các em một cách nhìn trực quan, dễ dàng phân biệt và hiểu sâu khái niệm, nắm bắt các tình huống khác nhau mà không cần phải ghi nhớ những lý thuyết trừu tượng, đồng thời hỗ trợ GV trong việc giải thích khái niệm một cách có hệ thống và logic.



Sơ đồ 2. Mối liên hệ giữa L và $f(x_0)$ (nếu tồn tại)

Cùng với các biểu diễn bằng đồ thị, bảng giá trị hay sơ đồ, GV cần kết hợp giữa ngôn ngữ và kí hiệu để BDTH, chẳng hạn như: (1) Sử dụng ngôn ngữ: Hàm số $f(x)$ có giới hạn bằng L tại $x = x_0$, nghĩa là hàm số $f(x)$ dần đến L khi x dần đến x_0 ; (2) Sử dụng kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (có thể đọc là “lim của $f(x)$ bằng L khi x dần tới x_0 ” để biểu thị hàm số $f(x)$ dần đến L khi x dần đến x_0 , hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$ ($f(x)$ dần đến L khi x dần đến x_0). Trong trường hợp sử dụng ngôn ngữ tự nhiên, chúng ta có thể chọn cách diễn đạt sao cho dễ nhớ, không nhất thiết phải mô tả một cách chi tiết. Tuy nhiên, khi dùng kí hiệu toán học để biểu diễn, GV cần sử dụng chính xác kí hiệu, biểu thức toán học.

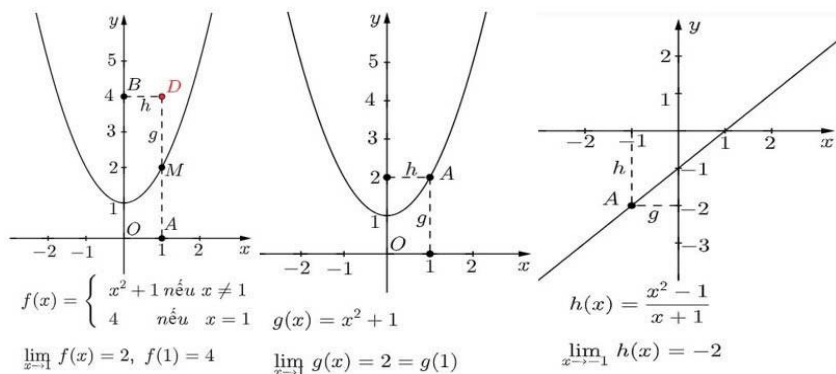
Pha 4. Kiểm tra và củng cố. Ở pha 4, GV có thể đưa ra các bài tập sau với mục tiêu là vừa kiểm tra sự hiểu biết của HS, vừa củng cố kiến thức về khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

Bài tập: Sử dụng khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm, em hãy tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)$; c) $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ với $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Bài tập này có thể được sử dụng để kiểm tra và củng cố khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm ở mức độ cơ bản, đặc biệt là khi vận dụng khái niệm để tính giới hạn. Các hàm số trong bài tập đều có cấu trúc tương đối đơn giản, giúp HS dễ dàng vận dụng khái niệm giới hạn để tính giới hạn mà không bị phân tán bởi các kỹ thuật tính toán phức tạp. GV cần sử dụng cách BDTH bằng đồ thị để trực quan hóa các bài tập đưa ra (xem hình 2).

Thông qua hoạt động giải các bài tập, HS được kiểm tra, rèn luyện và củng cố các kiến thức và kỹ năng sau: (1) Kiểm tra kiến thức: Bài tập yêu cầu HS cần vận dụng trực tiếp khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm để tính giới hạn, từ đó giúp các em tự kiểm tra mức độ nắm vững khái niệm này của bản thân; (2) Củng cố kiến thức: Bài tập giúp HS rèn luyện kỹ năng tính giới hạn bằng cách sử dụng khái niệm, đây là một



Hình 2. Biểu diễn bằng đồ thị các hàm số ở câu a), b), c)

kỹ năng cơ bản và quan trọng; (3) Phân biệt giá trị giới hạn và giá trị của hàm số tại một điểm: Các bài tập củng cố cho HS về đặc điểm của giới hạn tại một điểm: Hàm số $f(x)$ có giới hạn là L khi x dần đến x_0 không nhất thiết phải xác định tại x_0 .

Trong trường hợp $f(x)$ xác định tại x_0 , thì L vẫn có thể khác $f(x_0)$; (4) Phát triển tư duy logic và tư duy trừu tượng: Để giải các bài tập, HS cần sử dụng tư duy logic để phân tích bài toán, xác định các bước giải và đưa ra kết luận chính xác. Ngoài ra, khái niệm giới hạn là một khái niệm trừu tượng, việc làm quen với các bài tập giúp HS phát triển khả năng tư duy trừu tượng.

Tóm lại, các bài tập ở trên đã giúp HS vận dụng khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm vào giải bài tập và rèn luyện các kỹ năng tính toán; các em được củng cố kiến thức về giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm, là cơ sở để tiếp cận các khái niệm tiếp theo như “hàm số liên tục”, “đạo hàm”,... trong chương trình Toán 11.

3. Kết luận

Bài báo đã trình bày quy trình sử dụng BDTH trong dạy học môn Toán và minh họa quy trình trong dạy học khái niệm “Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm”. Thực tiễn dạy học cho thấy, quy trình này đã giúp HS tiếp cận khái niệm toán học từ nhiều góc độ khác nhau, từ đó nâng cao kiến thức và khả năng vận dụng kiến thức đã học vào giải quyết vấn đề trong môn Toán, các môn học khác và trong thực tiễn. Hiện nay, chúng tôi đang mở rộng quy trình này trong dạy học chủ đề “Giới hạn hàm số và hàm số liên tục” trong chương trình Toán 11, với những kết quả bước đầu khả quan. Quy trình BDTH đã đề xuất không chỉ đem lại hiệu quả trong dạy học môn Toán mà còn mở ra khả năng vận dụng vào các môn khoa học tự nhiên khác. Nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày kết quả so sánh hiệu quả của quy trình BDTH trong dạy học môn Toán với các phương pháp dạy học truyền thống, cũng như thử nghiệm vận dụng vào dạy học cho các đối tượng HS khác nhau.

Tài liệu tham khảo

- Denbel, D. G. (2014). Students' Misconceptions of the Limit Concept in a First Calculus Course. *Journal of Education and Practice*, 5(34), 24-40.
- Dilworth, J. (2004). Internal versus external representation. *The Journal of Aesthetics and Art Criticism*, 62, 23-36. <https://doi.org/10.1111/j.1540-594X.2004.00132.x>
- Fiantika, F. R. (2017). Representation Elements of Spatial Thinking. *Journal of Physics: Conference Series*, 824. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/824/1/012056>
- Hà Huy Khoái (tổng chủ biên), Cung Thế Anh, Trần Văn Tấn, Đặng Hùng Thắng (đồng chủ biên), Trần Mạnh Cường, Lê Văn Cường, Nguyễn Đạt Đăng, Lê Văn Hiện, Phan Thanh Hồng, Trần Đình Kế, Phạm Anh Minh, Nguyễn Thị Kim Sơn (2023). *Toán 11* (tập 1 - Bộ Kết nối tri thức với cuộc sống). NXB Giáo dục Việt Nam.
- Lê Thị Hoài Châu, Nguyễn Lâm Hồng Thắm (2018). Dạy học phân số ở tiểu học: Một nghiên cứu khai thác các biểu diễn trực quan. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 15(1), 27-39.
- Ma, B. P. D. (2023). Visual Representations in Teaching Mathematics. *Sprinj Journal of Arts, Humanities and Social Sciences*, 2(05), 21-30. <https://doi.org/10.55559/sjahss.v2i05.107>
- Mainali, B. R. (2020). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 9, 1-21. <https://doi.org/10.46328/IJEMST.1111>
- Musrikah, M., Asmarani, D., & Handoko, A. I. (2023). Karakteristik representasi visual, verbal, dan simbolis matematis mahasiswa calon guru sekolah dasar. *AKSIOMA: Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, 12(3). <https://doi.org/10.24127/ajpm.v12i3.6693>
- Ngô Trúc Phương (2019). Vai trò của biểu diễn toán học trong giải toán có lời văn ở bậc tiểu học. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Cần Thơ*, 55, 34-38. <https://doi.org/10.22144/ctu.jsi.2019.096>
- Nguyễn Minh Hậu, Huỳnh Thị Lựu (2018). Minh họa dạy học chủ đề khối đa diện với sự hỗ trợ của phần mềm Geogebra. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 15(4), 51-64.
- Putra, F. G., Lengkana, D., Sutiarsa, S., Nurhanurawati, N., Saregar, A., Diani, R., Widayawati, S., Suparman, S., Imama, K., & Umam, R. (2023). Mathematical Representation: A Bibliometric Mapping of The Research Literature (2013-2022). *Infinity Journal*, 13(1), 1-26. <https://doi.org/10.22460/infinity.v13i1.p1-26>
- Trần Đức Thuận, Văn Quế Trân, Nguyễn Hoàng Kim Yên, Nguyễn Ngọc Đan (2022). Tăng cường hoạt động trải nghiệm khi dạy học biểu đồ tranh cho học sinh lớp 2. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 19(8), 1245-1254.