VAI TRÒ CỦA TRI THỨC LỊCH SỬ TOÁN TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Cao Thị Hà[1,+],
Đào Phương Bắc[2],
Đào Thị Hoa Mai[1],
Lê Huy Hoàng[2]

[1]Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội;
[2]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội
+Tác giả liên hệ ● Email: caoha@vnu.edu.vn

Article history
Received: 29/9/2024
Accepted: 21/10/2024
Published: 20/01/2025

Keywords
History of mathematics, teaching mathematics, school, student

ABSTRACT
Mathematical knowledge is associated with specific historical and socio-cultural contexts. Mathematical knowledge may be the result of an individual's great scientific effort or a product refined over multiple generations. Leveraging historical knowledge in mathematics teaching in secondary schools can help students gain insight into the scientific work, thinking methods, and problem-solving approaches of mathematicians, thereby enhancing student interest and cultivating their critical thinking skills. This paper highlights that historical mathematical knowledge helps students develop a positive attitude, stay motivated, and enhance their thinking skills in learning mathematics. The findings from this study will continue to be revised through experimental implementation to provide assessments and recommendations for mathematics teaching in secondary schools as well as for developing professional development program for mathematics teachers.

1. Mở đầu

Kiến thức toán học không chỉ được xác định bởi các hoàn cảnh để trở thành một lí thuyết có cấu trúc suy diễn, mà còn bởi các quy trình ban đầu dẫn đến hoặc có thể dẫn đến nó (Clark et al., 2016). Học toán không chỉ bao gồm những "sản phẩm hoàn thiện" của hoạt động toán học, mà còn bao gồm việc hiểu những động cơ ngầm, hành động tạo nghĩa và quá trình phản ánh của nhà toán học, nhằm xây dựng ý nghĩa. Việc nhìn nhận toán học vừa là một tập hợp logic các sản phẩm trí tuệ, vừa là quá trình tạo lập ra kiến thức, nên là cốt lõi của việc giảng dạy toán học (Clark et al., 2016). Việc khai thác lịch sử toán học vào giáo dục toán học đã được khuyến khích từ nửa sau thế kỉ XIX (Clark et al., 2016; Goktepe & Ozdemir, 2013), khi các nhà toán học như De Morgan, Poincaré, Klein và những người khác công khai ủng hộ con đường này (Chorlay et al., 2022; Clark et al., 2016). Vào đầu thế kỉ XX, sự quan tâm này được hồi sinh như là hệ quả của các cuộc tranh luận về nền tảng của toán học, việc khai thác lịch sử toán học vào giáo dục toán học đã phát triển thành một lĩnh vực nghiên cứu mới trên toàn cầu với các hoạt động nghiên cứu chuyên sâu. Theo hướng này, việc khai thác các vấn đề lịch sử và nhận thức luận trong giảng dạy và học toán có thể là một cách tự nhiên để khám phá quá trình hình thành toán học và có thể dẫn đến sự hiểu biết sâu hơn về các phần cụ thể của toán học (Clark et al., 2016). Theo Sriraman và cộng sự (2008), việc khai thác lịch sử toán có thể giúp làm sống động các khái niệm toán học, đồng thời cung cấp bối cảnh lịch sử và văn hóa để HS dễ dàng tiếp cận hơn các tri thức toán học. Fauvel và Van Maanen (1997) lập luận rằng lịch sử toán học không chỉ làm phong phú thêm kiến thức toán học của HS mà còn có thể hỗ trợ HS trong việc phát triển tư duy phản biện và sáng tạo. Bằng cách hiểu quá trình phát triển của các lí thuyết và phương pháp toán học, HS có thể nhận ra rằng các nhà toán học cũng từng phải đối mặt với những sai lầm và thất bại, từ đó HS sẽ cảm thấy tự tin hơn trong quá trình học tập của mình. Các nghiên cứu cũng chỉ ra rằng việc kể các câu chuyện lịch sử về những nhà toán học có thể giúp HS hiểu rõ hơn về bản chất của toán học. Theo Jankvist (2009), lịch sử toán có khả năng tạo ra những cầu nối giữa toán học và các môn học khác, giúp HS thấy được mối liên hệ giữa toán học với văn hóa và xã hội. Do vậy, tác giả này cho rằng lịch sử toán không chỉ là phương tiện để dạy học toán mà nó còn là mục tiêu của quá trình dạy học (Jankvist, 2009).

Ở Việt Nam, việc nghiên cứu để khai thác tri thức về lịch sử toán vào dạy học toán gần đây được xuất hiện trong các nghiên cứu của Lê Thị Hoài Châu (2004) tập trung giới thiệu về lịch sử hình thành khái niệm tích phân. Volkov (2009) tìm hiểu về lịch sử toán học và giáo dục toán học ở Việt Nam, nhưng không tập trung vào việc phân tích vai trò cũng như chỉ ra được cách thức để khai thác tri thức lịch sử toán và trong quá trình dạy học toán. Tạ Duy Phương và Mai Văn Thu (2019) tập trung chủ yếu vào việc giới thiệu việc sử dụng một công thức diện tích tứ giác trong các sách toán cổ. Nghiên cứu của Phạm Văn Hoằng và Dương Thị Hiền (2023) đã bước đầu có những phân tích về vai trò của việc tích hợp lịch sử toán, ngoài ra các tác giả còn đề xuất được mô hình và quy trình để tích hợp lịch sử toán vào quá trình dạy học toán ở trường phổ thông, tuy nhiên các tác giả chưa có phân tích sâu sắc cũng như chưa chỉ ra được những vai trò cụ thể của các tri thức lịch sử toán trong quá trình dạy học toán ở trường phổ thông.

Vậy, có thể nói việc nghiên cứu về vai trò của lịch sử toán và khai thác lịch sử toán vào trong quá trình dạy học toán ở trường phổ thông là vấn đề chưa thực sự được quan tâm thích đáng ở Việt Nam. Do vậy, trong bài báo này, bằng phương pháp phân tích và tổng hợp tài liệu, chúng tôi sẽ phân tích vai trò của các tri thức lịch sử toán học trong quá trình dạy học toán và minh họa qua một số ví dụ.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Lịch sử toán học giúp tăng cường động lực và phát triển thái độ tích cực của học sinh đối với việc học

Lịch sử toán học là lĩnh vực khoa học nghiên cứu có hệ thống về những gì đã diễn ra trong ngành toán dựa trên bằng chứng xác thực, đề cập đến nguồn gốc của những khám phá trong toán học, các phương pháp và kí hiệu của toán học trong quá khứ (Phạm Văn Hoằng và Dương Thị Hiền, 2023, tr 2). Khi nói về vai trò của lịch sử toán trong việc thúc đẩy hứng thú học tập của HS, Fauvel (1991) nhấn mạnh rằng, trong bối cảnh rộng lớn của tri thức toán học của nhân loại, lịch sử và nhận thức luận của toán học đóng một vai trò quan trọng trong việc cung cấp một nền giáo dục toàn diện cho cộng đồng. Điều này đặc biệt quan trọng, nhất là trong giai đoạn mà chúng ta đang lo lắng về năng lực toán học của HS và về sự giảm sút hứng thú của họ đối với toán học, trong khi nhu cầu về cả kĩ năng kĩ thuật và một nền giáo dục rộng hơn đang gia tăng (Fauvel, 1991). Việc nghiên cứu để khai thác tri thức về lịch sử toán nhằm thúc đẩy sự hứng thú học tập toán cho HS đã được nhiều tác giả quan tâm như Fauvel (1991), Fauvel và Maanen (1997), Liu (2003), Cholay và cộng sự (2022). Các tác giả đều cho rằng nhiều nhà nghiên cứu giáo dục toán học và GV toán tin rằng toán học có thể trở nên thú vị hơn với người học bằng cách giới thiệu về thân thế và sự nghiệp của các nhà toán học và rằng các vấn đề lịch sử có thể khơi dậy và duy trì sự hứng thú của người học với môn học này. Fauvel còn nhấn mạnh rằng: theo quan điểm của tôi, GV toán học có nhiệm vụ giúp mỗi HS phát triển tối đa khả năng trân trọng và yêu thích toán học cũng như nhận thức được vai trò mà toán học đã và sẽ tiếp tục đóng góp vào sự phát triển của KH-CN và nền văn minh của chúng ta (Fauvel, 1991). HS nên có hiểu biết về cách mà các ý tưởng toán học thay đổi theo thời gian và cách mà bản chất của những ý tưởng này cũng như việc ứng dụng chúng bị ảnh hưởng bởi bối cảnh xã hội, tinh thần và văn hóa nơi chúng được phát triển, những điều này có thể là động lực thúc đẩy niềm yêu thích của HS với toán học (Liu, 2003).

Ví dụ 1: Số và các kiến thức về số là những kiến thức rất gần gũi với mọi HS, ngay từ lớp 1, HS đã được làm quen với số tự nhiên và cách ghi số tự nhiên. Những kiến thức đẹp đẽ về số tự nhiên sẽ theo người học suốt cuộc đời, nhưng người học có thể không biết được những kiến thức đó là sự tích lũy hàng nghìn năm của nhân loại. Theo Burton (2011), những hệ thống ghi số sớm nhất xuất hiện từ các nền văn minh tiền sử, khoảng 35.000 năm trước Công nguyên. Các nhà khảo cổ đã phát hiện ra những khúc xương với các dấu vạch khắc trên chúng, chẳng hạn như "khúc xương Ishango" được tìm thấy ở châu Phi. Đây là dạng ghi số nguyên thủy nhất mà loài người sử dụng, chủ yếu để đếm gia súc hoặc hàng hóa (Burton, 2011, tr 3). Người Sumer phát triển một hệ thống số được ghi lại bằng chữ hình nêm (cuneiform), với một hệ thống cơ số 60 (còn gọi là hệ sexagesimal). Hệ thống này không chỉ được sử dụng để ghi số mà còn áp dụng vào các lĩnh vực như thiên văn học và đo lường thời gian, với hệ số 60 còn ảnh hưởng đến hệ thống phân chia thời gian hiện đại (60 giây và 60 phút) (Burton, 2011, tr 6). Người La Mã phát triển một hệ thống số vào khoảng thế kỉ thứ VII trước Công nguyên, mà ngày nay ta gọi là "số La Mã". Hệ thống này sử dụng các kí tự như I, V, X, L, C, D và M để đại diện cho các con số khác nhau. Hệ thống này có tính ứng dụng cao trong việc đếm và lưu trữ thông tin, nhưng lại thiếu tính tiện dụng trong các phép tính phức tạp. Vào khoảng năm 300 đến 900 sau Công nguyên, người Maya ở Trung Mỹ phát triển một hệ thống số rất tiên tiến dựa trên cơ số 20 hay hệ vigesimal (Boyer, 2011, tr 7). Đáng chú ý, hệ thống số của người Maya bao gồm cả số không - một khái niệm hiếm có ở thời kì đó. Tuy nhiên, người Maya vẫn dựa trên các chấm và vạch để biểu thị các con số, cùng với kí hiệu hình vỏ sò để biểu thị số không. Hệ thống này được sử dụng chủ yếu cho các tính toán thiên văn và trong việc xây dựng lịch của họ. Một trong những bước tiến quan trọng nhất trong lịch sử ghi số là sự phát triển của hệ thống số Ấn Độ, sau này được truyền bá rộng rãi bởi các học giả Hồi giáo và trở thành hệ thống số Ả Rập mà chúng ta sử dụng ngày nay. Hệ thống này dựa trên cơ số 10 và bao gồm các kí hiệu cho các con số từ 0 đến 9 (Burton, 2011; Boyer & Marzbach, 2011). Đây là hệ thống số vị trí đầu tiên, trong đó giá trị của một chữ số phụ thuộc vào vị trí của nó trong dãy số. Nhà toán học người Ấn, Brahmagupta, là một trong những người đầu tiên định nghĩa số không như một giá trị thực và các phép toán liên quan. Sự phát triển của hệ thống số này đã đóng vai trò nền tảng trong việc phát triển các khái niệm toán học hiện đại và kĩ thuật tính toán. Nhờ sự đơn giản và hiệu quả của nó, hệ thống số Ả Rập đã dần thay thế các hệ thống số cổ như số La Mã, và trở thành hệ thống số được sử dụng trên toàn cầu (Burton, 2011).

Như vậy, việc hình thành các kiến thức cơ bản về số và chữ số đã trải qua hàng nghìn năm lịch sử và được đóng góp bởi nhiều nhà khoa học ở nhiều nền văn minh trên thế giới. Do vậy, khi dạy nội dung số học ở lớp 6, GV có thể giới thiệu sơ bộ về sự hình thành những hệ thống ghi số như trong ví dụ 1 thông qua bài đọc thêm để có thể tạo ra một môi trường học tập hấp dẫn và đầy cảm hứng cho HS. Lịch sử của các nhà toán học vĩ đại và các khám phá toán học không chỉ giúp HS hiểu rõ hơn về các khái niệm toán mà còn khơi gợi sự tò mò và đam mê khám phá khoa học. Ngoài ra, việc kể những câu chuyện về cuộc đời và công việc của các nhà toán học nổi tiếng cũng có thể làm cho HS thấy toán học trở nên gần gũi hơn, giúp họ cảm nhận được sự phấn khích khi khám phá những bí ẩn của thế giới. Bằng cách nghe về quá trình khám phá và những ứng dụng thực tế của các kiến thức toán học trong cuộc sống, kiến trúc và thiên văn học cổ đại, HS sẽ cảm thấy rằng toán học không phải là một lĩnh vực khô khan mà là một hành trình tìm kiếm kiến thức đầy thú vị và gắn liền với cuộc sống (Liu, 2003).

2.2. Lịch sử toán học giúp học sinh hiểu được những trở ngại trong quá khứ đối với sự phát triển của toán học từ đó giúp giải thích những gì mà bản thân họ cảm thấy khó khăn cũng như tạo động lực để học toán

Toán học là môn học trừu tượng cao độ nhưng lại rất chặt chẽ. Tuy vậy, Fauvel cho rằng việc nhận thức được những đặc tính này của toán học còn phụ thuộc vào trình độ toán học của mỗi người (Fauvel, 1991). Do vậy, kiến thức về lịch sử toán học có thể mang lại cho HS những trải nghiệm về cách các tiêu chuẩn về tính chặt chẽ của toán học đã phát triển qua nhiều thế kỉ. Hơn nữa, kiến thức về lịch sử toán còn giúp HS hiểu được nhiều khái niệm toán học đã phát triển và được điều chỉnh qua nhiều thời kì. Fauvel còn cho rằng: Việc hiểu biết về những tranh luận giữa các nhà toán học vĩ đại có thể khơi gợi ở người học sự hoài nghi lành mạnh và thảo luận trong lớp học, đồng thời dẫn đến việc nắm vững hơn các nguyên tắc (Fauvel, 1991). GV cần giúp HS hiểu rằng, nhiều kiến thức được giảng dạy ngày nay là sản phẩm hoàn chỉnh mà đã được tìm tòi qua nhiều thế kỉ hoặc những cuộc tranh cãi sôi nổi (Fauvel, 1991), điều này có thể tạo ra cho người học sự tự tin để vượt qua những khó khăn trong quá trình học toán.

Ví dụ 2: Ta hãy xem xét lịch sử hình thành khái niệm giới hạn:

Theo Liu (2003): "*Nhiều HS cảm thấy nản lòng khi cố gắng hiểu định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ epsilon-delta, vì khái niệm hiện đại về giới hạn đã từng khiến nhiều nhà toán học xuất sắc trong lịch sử bối rối*". Do đó, tác giả này cho rằng việc mong đợi HS hiểu và sử dụng thành thạo định nghĩa giới hạn theo ngôn ngữ epsilon-delta trong một khoảng thời gian ngắn có lẽ là thiếu thực tế. Cornu (1991) cũng chỉ ra rằng những trở ngại về nhận thức của HS có thể phản ánh khó khăn trong lịch sử sự phát triển của khái niệm giới hạn. Vậy ta hãy điểm qua những cột mốc quan trọng hình thành khái niệm giới hạn.

Khái niệm giới hạn đã được ẩn chứa trong các tính toán về diện tích và thể tích của các học giả Hy Lạp cổ đại như Eudoxus và Archimedes. Mặc dù các khía cạnh bản chất của ý tưởng giới hạn được ngầm định trong "Phương pháp vét cạn" của họ, nhưng Eudoxus và Archimedes chưa từng xây dựng rõ ràng khái niệm về giới hạn (Stewart, 2012, tr 101). Tuy nhiên, Isaac Newton là người đầu tiên phát biểu rõ ràng về giới hạn trong bộ sách "Các nguyên lí Toán học của Triết học tự nhiên" nổi tiếng của ông vào năm 1687 (Stewart, 2010, tr 101). Ông giải thích rằng ý tưởng chính đằng sau giới hạn là các đại lượng "*tiến gần hơn bất kì sự khác biệt nào cho trước*". Newton cũng khẳng định rằng giới hạn là điểm mấu chốt để xây dựng phép tính vi tích phân. Tuy vậy, phát biểu chính xác về giới hạn cần thông qua ngôn ngữ epsilon-delta mãi đến thế kỉ XIX mới xuất hiện ở dạng như hiện nay phải chờ đến những người như J. d'Alembert, hay gần hơn như A. Cauchy, K. Weierstrass (Stewart, 2010, tr 101; Trung & Trung, 2017).

Theo Burton, D'Alembert cho rằng một khung logic vững chắc cho phép tính nằm ở việc sử dụng giới hạn (Burton, 2011, tr 605). Tuy nhiên, trong bài viết "Giới hạn" cho Encyclopédie, ông đã đưa ra một định nghĩa mơ hồ và hoàn toàn bằng lời: "*Một đại lượng được gọi là giới hạn của một đại lượng khác khi đại lượng thứ hai có thể tiến đến đại lượng thứ nhất trong bất kì đại lượng nào được cho dù nhỏ đến đâu, mặc dù đại lượng thứ nhất không bao giờ vượt quá đại lượng mà nó tiến đến.*" (Burton, 2011, tr 605). Không thể thoát khỏi các truyền thống của toán học thế kỉ XVIII, cách giải thích về giới hạn của d'Alembert dựa vào *hình dung hình học* và những ý tưởng mơ hồ về "sự gần gũi" nên những người cùng thời với ông khó có thể thỏa mãn với mô tả này (Boyer, 2011, tr 427; Boyer & Merzbach, 2011; Burton, 2011, tr 605). Hay nói cách khác, việc tiếp cận khái niệm giới hạn dựa trên trực giác hình học của d'Alembert đa "không có nhiều ảnh hưởng như nó đáng lẽ phải có, ông đã không nhận ra rằng khái niệm tinh vi như vậy cần có một công thức cực kì cẩn trọng" (Burton, 2011, tr 605).

Sau hơn 10 năm kể từ khi d'Alembert đưa ra khái niệm về giới hạn, những nhà toán học hàng đầu thời bấy giờ là Euler và Lagrange, đã rất nỗ lực để tổng hợp và phát triển những nghiên cứu về giới hạn và phép tính vi phân, mặc dù không thành công nhưng vẫn mang lại những kết quả hữu ích để cung cấp một nền tảng chấp nhận được cho những vấn đề này (Burton, 2011, tr 606). Mặc dù những người dẫn đầu phong trào này đã hiểu về giới hạn và đưa ra những mô tả về giới hạn tốt hơn phần lớn các nhà toán học cùng thời, họ vẫn không thể đưa ra một định nghĩa rõ ràng và chính xác để làm cho khái niệm này trở nên hợp lí về mặt logic. Cuối cùng, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) đã phát triển một lí thuyết giới hạn có thể chấp nhận được, và qua đó, xóa bỏ phần lớn những nghi ngờ về tính vững chắc của khái niệm này (Burton, 2011, tr 606; Boyer & Merzbach, 2011, tr 455).

Theo Boyer, cách trình bày phép tính vi phân trong hầu hết các sách giáo khoa ngày nay về cơ bản là những gì Cauchy đã giải thích trong ba tác phẩm vĩ đại: *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* xuất bản năm 1821, *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* xuất bản năm 1823, và *Leçons sur le calcul différentiel* xuất bản năm 1829. Trong phần giới thiệu của *Cours d'analyse*, Cauchy đã nêu rõ tham vọng của mình là loại bỏ sự mơ hồ lớn lao đang tồn tại trong giải tích (Burton, 2011, tr 608) thông qua việc ông đã đưa ra định nghĩa về giới hạn của dãy số như sau (Boyer & Merzbach, 2011, tr 406): "*Một dãy số (a_n) được gọi là hội tụ tới một giá trị giới hạn L nếu với bất kì khoảng cách nhỏ nào (sai số) cho trước, ta có thể tìm được một vị trí trong dãy sao cho mọi phần tử sau vị trí đó đều nằm trong khoảng cách đó đến L*". Cũng trong cuốn *Cours d'analyse*, Cauchy đã dựa trên *các khái niệm về số, biến, và hàm số* để đưa ra định nghĩa về *giới hạn của hàm số*, ông nói: "*Khi các giá trị liên tiếp được gán cho một biến tiến gần vô hạn đến một giá trị cố định sao cho cuối cùng chúng khác với giá trị đó một lượng nhỏ tùy ý, thì giá trị cố định đó được gọi là giới hạn của tất cả các giá trị khác.*"(Burton, 2011, tr 608).

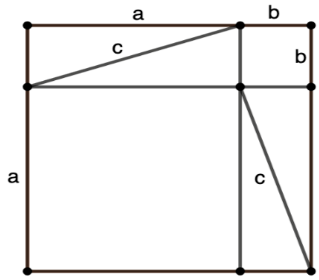
Như vậy, *Cours d'analyse* của Augustin Louis Cauchy bao gồm định nghĩa về giới hạn được sử dụng cho đến những năm 1870, khi phiên bản hiện đại đầu tiên về khái niệm giới hạn theo ngôn ngữ epsilon (ε) và delta (δ) được đề xuất. Các khái niệm của Cauchy về giới hạn đã loại bỏ các khái niệm trực quan thô sơ và mang tính hình học của các nhà giải tích trước đó (Burton, 2011, tr 608). Tuy nhiên, người có công phát triển định nghĩa giới hạn của hàm số một cách rõ ràng và chặt chẽ hơn bằng cách sử dụng các kí hiệu epsilon và delta là Karl Weierstrass. Burton cho rằng, định nghĩa khái niệm giới hạn hàm số bằng cách sử dụng ngôn ngữ ε,δ của Weierstrass là nền tảng cho định nghĩa giới hạn hiện đại mà chúng ta dùng ngày nay (Burton, 2011, tr 608). Theo đó, định nghĩa giới hạn hàm số theo ngôn ngữ ε,δ được phát biểu như sau: Số L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi x dần đến x_0 nếu, với mỗi số dương ε bé tùy ý, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi giá trị của x khác x_0 nhưng cách x_0 một khoảng nhỏ hơn δ thì giá trị của $f(x)$ sẽ khác L một lượng nhỏ hơn ε (Boyer, 1959, tr 287). Ngày nay, khái niệm giới hạn đã được trình bày ngắn gọn hơn bằng cách sử dụng kí hiệu "lim" và sử dụng các bất đẳng thức để diễn tả sự khác biệt giữa x với x_0 và giữa $f(x)$ với L.

Như vậy, khái niệm giới hạn đã phát triển trong thời gian dài từ những thời kì sơ khai của toán học đến giai đoạn phát triển đầu của toán học hiện đại, đặc biệt từ những khởi đầu của Newton vào năm 1687 đến định nghĩa hoàn thiện về giới hạn của Weierstrass vào những năm cuối của thế kỉ XIX. Với sự đóng góp của nhiều nhà toán học lỗi lạc qua nhiều thế kỉ để được định nghĩa giới hạn như ngày hôm nay cho thấy sự phức tạp của vấn đề và xu hướng muốn tìm đến sự hoàn thiện của các nhà toán học. Do vậy, Fauvel (1991) cho rằng: "*Chúng ta không nên bỏ qua sự kiên trì và chiều sâu, ở một mức độ nào đó, sự phát triển của tri thức trong từng người học phải tuân theo cùng một lộ trình như sự phát triển của tri thức của loài người*".

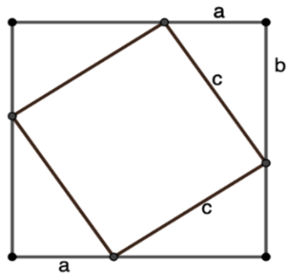
2.3. Lịch sử toán học giúp phát triển tư duy toán học của học sinh

Tư duy toán học là sự kết hợp của các quá trình phức tạp: phỏng đoán, quy nạp, suy diễn, đặc tả, khái quát hóa, tương tự, lí luận chính thức và không chính thức, kiểm chứng,… Tuy nhiên, các sách giáo khoa hiện đại thường trình bày các khái niệm toán học một cách gọn gàng và hoàn thiện, "che giấu sự đấu tranh, che giấu cuộc phiêu lưu" (Lakatos, 1976, tr 142). Bằng cách giúp HS hiểu lịch sử của việc phát triển các bài toán và phân tích các phương pháp tiếp cận bài toán của các nhà toán học trong các thời kì trước, việc trình bày lịch sử phát triển của các bài toán còn giúp cho người học có cơ hội biết được nhiều lời giải cho một bài toán, điều này giúp rèn luyện tính mềm dẻo, linh hoạt của tư duy cho HS.

Ví dụ 3: Ta xét định lí Pythagore, về định lí này nhiều giả thuyết cho rằng Pythagoras là người đã chứng minh định lí này một cách sớm nhất bằng cách tách ra từng phần (Nguyễn Bá Đô & Hồ Châu, 2001, tr 56), tuy nhiên có rất ít bằng chứng thuyết phục để xác nhận rằng Pythagore, hoặc thậm chí là một trong những học trò trực tiếp của ông đã đưa ra chứng minh đầu tiên về định lí (Burton, 2011, tr 105). Do vậy, cách chứng minh đầu tiên được ghi nhận là cách chứng minh được ghi trong bộ "Nguyên lí" của Euclid (Burton, 2011, tr 105; Nguyễn Bá Đô & Hồ Châu, 2001, tr 56). Chứng minh này được trình bày như sau:



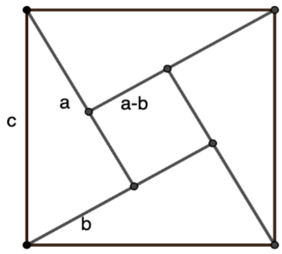
Hình 1



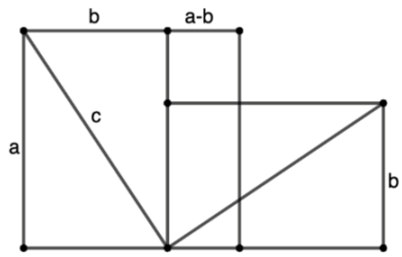
Hình 2

Xét hình vuông có độ dài cạnh là $a+b$, chia hình vuông này thành hai hình vuông có cạnh lần lượt là a,b và hai hình chữ nhật với các cạnh là a và b (hình 1). Mỗi hình chữ nhật lại được chia thành hai tam giác vuông bằng cách kẻ đường chéo c của hình chữ nhật đó, bốn tam giác được tạo thành sẽ được xếp lại thành một hình vuông có cạnh là $a+b$ được cho trong hình 2. Diện tích hình vuông này có thể được tính theo hai cách, trước hết do hình vuông có cạnh là $a+b$ nên diện tích của nó là: $(a+b)^2$. Mặt khác, diện tích hình vuông lớn này bằng tổng diện tích của hình vuông có cạnh là c và diện tích của 4 tam giác vuông bằng nhau có cạnh góc vuông lần lượt là a,b. Do vậy ta có: $(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Theo Burton, nhà toán học người Ấn Độ Bhaskara (Burton, 2011, tr 106) đã đưa ra kĩ thuật chứng minh định lí Pythagore bằng cách trong hình vuông có cạnh là c, vẽ bốn tam giác vuông mà có cạnh huyền là c và các cạnh góc vuông là a,b, sao cho ở giữa vẫn còn một hình vuông có cạnh bằng hiệu giữa hai cạnh của tam giác vuông (hình 3). Hình vuông nhỏ này và bốn hình tam giác sau đó được sắp xếp lại để tạo thành diện tích của hai hình vuông, độ dài các cạnh tương ứng với các cạnh của tam giác vuông (hình 4). Bhaskara nói: "*Hãy nhìn xem, mà không nói thêm một lời nào nữa, định lí đã được chứng minh*".



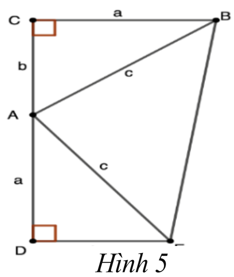
Hình 3



Hình 4

Điểm độc đáo trong chứng minh này là Bhaskara chỉ sử dụng đến công thức tính diện tích của hình vuông mà không cần thêm công thức tính diện tích của tam giác vuông, nên nó ưu việt hơn so với cách chứng minh được ghi trong cuốn "Nguyên lí" của Euclid.

Một phương pháp chứng minh khác cho định lí Pythagore còn được giới thiệu bởi Jame Garfield vào năm 1876 (Burton, 2011, p. 120), nội dung của phương pháp chứng minh này như sau: Cho tam giác vuông ABC, dựng tam giác vuông ADE đồng dạng với tam giác vuông ABC (hình 5). Nối E và B để tạo thành tứ giác $BEDC$, bằng cách thay diện tích của tứ giác $BEDC$ bằng tổng diện tích của các tam giác vuông ABC, ADE, ABE ta chứng minh được rằng $c^2 = a^2 + b^2$. Như vậy, theo cách chứng minh này, tác giả chỉ sử dụng đến công thức tính diện tích của tam giác vuông mà không cần đến công thức tính diện tích của hình vuông, nên nó là một trong các phương pháp chứng minh khá đẹp cho định lí Pythagore.



Hình 5

Trong ví dụ này, chúng tôi đã trình bày một số phương pháp chứng minh định lí Pythagore đã được các nhà lịch sử toán học đề cập đến, mỗi phương pháp cho thấy sự sáng tạo của các nhà toán học. Do vậy, việc giới thiệu cách chứng minh định lí nổi tiếng này cho HS là một trong những cách để rèn tư duy sáng tạo cho họ.

3. Kết luận

Mỗi tri thức toán học của loài người đều gắn với bối cảnh lịch sử ra đời của nó, vì vậy việc dạy toán cho HS nếu chỉ tập trung vào việc dạy những tri thức hoàn thiện mà bỏ qua bối cảnh văn hóa, xã hội để hình thành nên tri thức này sẽ gián tiếp bỏ qua sự lao động khoa học cũng như phương pháp tiếp cận và giải quyết vấn đề của các nhà toán học. Do vậy, việc khai thác các tri thức toán học trong quá trình dạy học toán để giúp cho người học hiểu được sự lao động vất vả và phương pháp tư duy để khám phá, giải quyết vấn đề của các nhà toán học cũng quan trọng không kém việc giúp cho HS hiểu một tri thức toán học. Một số nghiên cứu thực nghiệm cũng cho thấy rằng việc giảng dạy có lồng ghép lịch sử toán học đã làm tăng sự hứng thú và thành tích học tập của HS và họ có khả năng áp dụng các khái niệm toán vào các bài toán thực tế tốt hơn so với các HS trong lớp học truyền thống.

Tóm lại, việc sử dụng tri thức lịch sử toán học không chỉ giúp tăng cường hứng thú của HS đối với môn học mà còn giúp họ kết nối toán học với thực tế và văn hóa, từ đó tạo ra một nền tảng học tập mạnh mẽ và bền vững hơn. Các kết quả nghiên cứu của bài báo này mặc dù mới ở trên phương diện lí thuyết, tuy nhiên nó là tiền đề cho các nghiên cứu thực nghiệm về vai trò của lịch sử toán trong quá trình dạy học toán cho HS và từ đó có thể có những gợi mở cho việc hoàn thiện các chương trình đào tạo GV toán ở Việt Nam trong giai đoạn tới.

Tài liệu tham khảo

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development (The concepts of the calculus)*. Courier Corporation.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons.

Burton, D. M. (2011). The history of mathematics: An introduction. *Group*, *3*(3), 35.

Clark, K., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., Tzanakis, C., & Wang, X. (2016). *History of mathematics in mathematics education: Recent developments.* History and pedagogy of mathematics.

Cornu, B. (1991). Limits. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. *ZDM-Mathematics Education*, *54*(7), 1407-1420. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01442-7

Fauvel (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), 3-6.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an ICMI study (1997-2000). *Educational Studies in Mathematics*, *34*, 255-259.

Goktepe, S., & Ozdemir, A. S. (2013). An Example of Using History of Mathematics in Classes. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(3), 125-136.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 235-261.

Lakatos (1976). Understanding Toulmin. *Minerva*, *14*, 126-143.

Lê Thái Bảo Thiên Trung, Phạm Hoài Chung (2017). Dạy và học định nghĩa chính xác về giới hạn của hàm số thông qua quá trình mô hình hóa toán học. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Cần Thơ*, *51*, 1-6.

Lê Thị Hoài Châu (2004). Khai thác lịch sử toán trong dạy - học khái niệm tích phân. *Tạp chí Khoa học*, *Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, *2*, 37-45.

Liu, P. H. (2003). Connecting research to teaching: Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *The Mathematics Teacher*, *96*(6), 416-421.

Nguyễn Bá Đô, Hồ Châu (2001). *Các câu chuyện Toán học (tập 2. Cái đã biết trong cái chưa biết)*. NXB Giáo dục.

Phạm Văn Hoằng, Dương Thị Hiền (2023). Đề xuất mô hình tích hợp dữ liệu lịch sử toán vào dạy học môn Toán ở trường phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, *23*(9), 1-6.

Sriraman, B. (Ed.). (2008). *Mathematics education and the legacy of Zoltan Paul Dienes*. IAP.

Stewart, J. (2012). *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning.

Tạ Duy Phượng, Mai Văn Thu (2019). Về sử dụng một công thức diện tích tứ giác trong các sách toán cổ. *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, *502*(4), 11-13.

Volkov, A. (2009). Mathematics and Mathematics Education in Traditional Vietnam. In: Eleanor Robson and Jacqueline Stedall (eds.). *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, 153-176.