DẠY HỌC "ĐỊNH LÍ CÔSIN" (TOÁN 10) NHẰM BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC CHO HỌC SINH

Nguyễn Ái Quốc[+], Nguyễn Thị Tường Vy

Trường Đại học Sài Gòn

+ Tác giả liên hệ ● Email: naquoc@sgu.edu.vn

Article history
Received: 04/11/2024
Accepted: 20/11/2024
Published: 20/01/2025

Keywords
Cosine Theorem, mathematical modeling competency, students, Math 10

ABSTRACT
According to the General Education Curriculum for Mathematics, one of the five core mathematical competencies that need to be formed and developed for students in teaching Mathematics is the mathematical modeling competency. This study proposes a mathematical modeling process in teaching the "Cosine Theorem" (Math 10), consisting of five steps: determining the data of the initial practical problem; building a mathematical model; solving the mathematical problem; interpreting and determining the rationality of the results in a practical context; accomplishing the solution and answering the initial practical problem. Next, the mathematical modeling process is applied to the experimental teaching of the Cosine Theorem for grade 10 at Nguyen Huu Tho High School, District 4, Ho Chi Minh City. The results of the experimental teaching show that the students actively participated in the mathematical modeling process, discovering the Cosine Theorem through solving practical problems; thereby developing personal capacity, teamwork capacity and mathematical modeling capacity.

1. Mở đầu

Hình thành và bồi dưỡng các năng lực toán học là một trong những mục tiêu dạy học được quy định trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018. Năng lực mô hình hóa toán học (MHHTH) là một trong năm năng lực toán học, giúp HS có thể sử dụng các kiến thức toán học vào giải quyết các bài toán thực tế. HS sẽ thực hiện quy trình MHHTH để chuyển một vấn đề trong thực tế thành bài toán toán học, sau đó sử dụng các công cụ toán học đã biết để giải bài toán toán học, xem xét tính hợp lí của kết quả và cuối cùng là trả lời cho bài toán thực tế ban đầu. Năng lực MHHTH đã được nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn như các nghiên cứu của Blomhoej & Højgaard (2003), Henning và Keune (2004), Maaß (2006), Kaiser (2007), Nguyễn Danh Nam (2016), Lê Thị Hoài Châu và Nguyễn Thị Nhân (2019), Lê Hồng Quang (2020), Gürel (2023),… đã đề cập vấn đề phát triển năng lực MHHTH cho HS thông qua dạy học các chủ đề toán học ở THCS và THPT.

Định lí Côsin là nội dung quan trọng trong chương trình Toán 10, là công cụ toán học cho phép HS vận dụng vào để tính độ dài một cạnh của tam giác khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo của góc xen giữa hai cạnh đó; tính góc của một tam giác khi biết độ dài của ba cạnh; tính độ dài một cạnh khi biết số đo của một góc kề với cạnh ấy và độ dài của hai cạnh còn lại,… Ngoài ra, định lí Côsin có thể được vận dụng vào giải quyết các tình huống thực tế như tính khoảng cách giữa hai vị trí mà không thể đo đạc trực tiếp vì bị chia cắt bởi các chướng ngại về địa hình. Vì vậy, định lí này có nhiều tiềm năng trong dạy học nhằm phát triển năng lực MHHTH cho HS. Bài báo trình bày một số khái niệm về "MHHTH" và "năng lực MHHTH", xây dựng quy trình MHHTH trong dạy học "Định lí Côsin" (Toán 10) và một kết quả dạy học thực nghiệm định lí Côsin tại Trường THPT Nguyễn Hữu Thọ, Quận 4, TP. Hồ Chí Minh. Trong bài báo này, chúng tôi phân tích, tổng hợp các công trình nghiên cứu để làm rõ một số khái niệm về MHHTH, năng lực MHHTH và đưa ra quy trình MHHTH; ở phần dạy học thực nghiệm minh họa quy trình MHHTH đã đề xuất, thông qua phương pháp đánh giá định tính để đánh giá bài làm cá nhân của HS và bài làm của các nhóm, từ đó đánh giá được cơ hội bồi dưỡng các biểu hiện của năng lực MHHTH cho HS khi tham gia giải quyết nhiệm vụ được giao.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

- *MHHTH:* Theo Edwards và Hamson (2001), MHHTH là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tế sang vấn đề toán học bằng cách thiết lập và giải quyết các mô hình toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận. Theo Haines và Crouch (2001), MHHTH là một quá trình tuần hoàn, trong đó những vấn đề trong thế giới thực được tóm tắt trong mô hình toán học, thực hiện phương án giải quyết và đánh giá theo các giai đoạn sau: (1) Nêu vấn đề trong thực tế, xây dựng mô hình toán học; (2) Giải bài toán; (3) Giải thích kết quả, đánh giá phương án giải quyết vừa thực hiện; (4) Điều chỉnh mô hình trước khi đưa ra kết luận cuối cùng cho vấn đề ban đầu và lặp lại chu trình. Theo Barreto (2010), MHHTH là một mô hình trừu tượng, sử dụng ngôn ngữ toán học (bao gồm: các đồ thị, phương trình, hệ phương trình, hàm số, kí hiệu toán học,…) để biểu diễn và mô tả đặc điểm của một sự vật, hiện tượng hay một đối tượng thực được nghiên cứu. Theo Kaur và Dindyal (2010), MHHTH chính là mô tả các hiện tượng trong thực tế, trả lời các câu hỏi về thế giới xung quanh, kiểm tra ý tưởng, dự đoán về thế giới xung quanh. Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi, MHHTH là quá trình chuyển đổi bài toán thực tế sang bài toán toán học, thông qua sử dụng ngôn ngữ toán học và các mô hình toán học để mô tả và giải quyết các đối tượng trong bài toán thực tế ban đầu.

- *Năng lực mô hình hóa toán học:* Theo Henning và Keune (2004), năng lực MHHTH là tổ hợp những thuộc tính của cá nhân người học như kiến thức, kĩ năng, thái độ và sự sẵn sàng tham gia các hoạt động MHHTH nhằm đảm bảo cho hoạt động đó đạt hiệu quả. Theo Maab (2006), năng lực MHHTH bao gồm các kĩ năng và khả năng thực hiện quá trình mô hình hóa nhằm đạt được mục tiêu xác định, là khả năng thực hiện đầy đủ các giai đoạn của quy trình mô hình hóa trong dạy học môn Toán nhằm giải quyết vấn đề toán học được đặt ra. Kaiser (2007) cho rằng, năng lực MHHTH đặc trưng cho khả năng thực hiện toàn bộ quá trình MHHTH và phản ánh về quá trình đó. Theo Nguyễn Danh Nam (2016), năng lực MHHTH được cho là sự sẵn sàng của một ai đó để thực hiện tất cả các phần của quy trình MHHTH trong một tình huống nhất định. Như vậy, có thể hiểu năng lực MHHTH là khả năng thực hiện quá trình MHHTH và giải bài toán toán học trên các mô hình toán học đã xây dựng được.

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, năng lực MHHTH của HS THPT gồm có 03 biểu hiện sau: (1) Thiết lập được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, sơ đồ, hình vẽ, bảng biểu, đồ thị,...) để mô tả tình huống đặt ra trong một số bài toán thực tiễn; (2) Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập; (3) Lí giải được tính đúng đắn của lời giải (những kết luận thu được từ các tính toán là có ý nghĩa, phù hợp với thực tế hay không). Đặc biệt, nhận biết được cách đơn giản hóa, cách điều chỉnh các yêu cầu thực tiễn (xấp xỉ, bổ sung thêm giả thiết, tổng quát hóa,...) để đưa đến các bài toán giải được (Bộ GD-ĐT, 2018).

2.2. Quy trình mô hình hóa toán học trong dạy học "Định lí Côsin" (Toán 10)

Trong dạy học định lí Côsin, thông qua các hoạt động trải nghiệm, HS tự khám phá lại định lí Côsin, hình thức hóa định lí Côsin và hệ quả, vận dụng định lí Côsin vào giải quyết các vấn đề tương tự trong thực tế. Từ quy trình MHHTH của Stillman và cộng sự (2008), chúng tôi xây dựng quy trình MHHTH trong dạy học định lí Côsin gồm các bước sau:

- *Bước 1. Xác định các dữ kiện của bài toán thực tế ban đầu:* Trong bước này, HS đọc hiểu, xác định yêu cầu của bài toán, các dữ kiện cần thiết.
- *Bước 2. Xây dựng mô hình toán học:* HS cần xây dựng mô hình toán học thông qua hình vẽ, biểu diễn các số liệu trên hình vẽ, chuyển bài toán thực tế ban đầu về bài toán toán học.
- *Bước 3. Giải bài toán toán học:* Để giải bài toán toán học, HS sẽ xâu chuỗi các kiến thức và quy tắc toán học cần thiết đã học để tiến hành giải bài toán toán học đã xây dựng được ở bước hai.
- *Bước 4. Diễn giải và xem xét tính hợp lí của kết quả trong bối cảnh thực tế:* Để xem xét tính hợp lí của kết quả trong bối cảnh thực tế, HS sẽ xét sự thỏa mãn điều kiện về mặt toán học nghiệm của bài toán toán học và tính hợp lí của kết quả thu được trong thực tế.
- *Bước 5. Hoàn thiện giải pháp và trả lời cho bài toán thực tế ban đầu:* Trong bước này, HS trình bày lời giải theo trình tự logic với các lập luận toán học, trả lời cho vấn đề thực tế ban đầu.

2.3. Tổ chức dạy học "Định lí Côsin" (Toán 10) nhằm bồi dưỡng năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh lớp 10

Thực nghiệm dạy học định lí Côsin được tổ chức vào cuối tháng 10/2024 tại Trường THPT Nguyễn Hữu Thọ, Quận 4, TP. Hồ Chí Minh. Lớp học gồm 41 HS, được chia thành 10 nhóm, có 9 nhóm gồm 4 HS và một nhóm gồm 5 HS. Thời gian dạy học là 60 phút.

Tham khảo quy trình dạy học phát triển năng lực toán học cho HS của Đỗ Đức Thái và cộng sự (2020), chúng tôi tiến hành dạy học định lí Côsin bao gồm 3 giai đoạn: khám phá định lí Côsin; hình thành định lí Côsin; củng cố kiến thức về định lí Côsin. Trong 3 giai đoạn đó, quy trình MHHTH sẽ được GV sử dụng hai lần trong giai đoạn 1 và 3 khi tổ chức cho HS giải bài toán thực tế 1 và 2. Trong giai đoạn 1, HS chưa biết định lí Côsin, do đó ở bước thứ ba, HS sẽ sử dụng các kiến thức đã học như định lí Pythagoras và tỉ số lượng giác để giải bài toán toán học; đồng thời với các câu hỏi gợi mở của GV, HS sẽ tự khám phá ra định lí Côsin. Trong giai đoạn 3, HS sẽ vận dụng định lí Côsin đã học vào giải quyết bài toán thực tế 2 theo năm bước của quy trình MHHTH. Cụ thể:

Giai đoạn 1: Khám phá định lí Côsin. GV phát phiếu học tập số 1 có chứa nội dung bài toán 1 cho các nhóm:

Bài toán 1: Đường hầm dài nhất Bắc Mỹ được xây dựng năm 1962 xuyên qua dãy núi Kicking Horse Canyon thuộc tiểu bang British Columbia của Canada. Đường hầm nằm trên tuyến đường cao tốc Xuyên Canada nối liền những vùng thảo nguyên rộng lớn với bờ biển phía Tây. Giả sử đoàn khảo sát chọn được một điểm A cách lối vào (điểm B) của đường hầm một khoảng cách $3000m$, cách lối ra đường hầm (điểm C) một khoảng cách $2000m$ và đo được $\widehat{BAC} = 67{,}7°$. Hãy xác định độ dài của đường hầm và làm tròn theo đơn vị mét (McAskill et al., 2011).

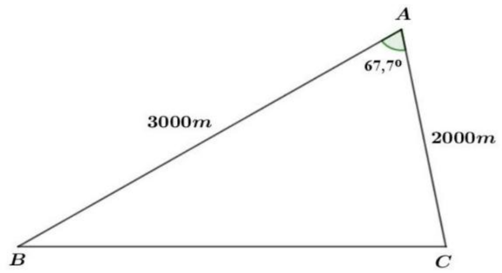
- *Bước 1. Xác định các dữ kiện của bài toán thực tế ban đầu.* GV yêu cầu các nhóm đọc, hiểu bài toán và trả lời các câu hỏi sau: (1) Yêu cầu của bài toán là gì?; (2) Liệt kê các dữ kiện cần thiết cho quá trình giải bài toán. Kết quả bài làm của các nhóm: Tất cả 11 nhóm đều trả lời đúng như mong đợi: (1) Yêu cầu của bài toán là xác định độ dài của đường hầm; (2) Các dữ kiện cần thiết cho việc giải quyết bài toán là các khoảng cách $3000m$, $2000m$, góc $67{,}7°$.

Ở bước 1, HS được tiếp cận một vấn đề thực tế, đòi hỏi các em phải đọc, hiểu và chọn lọc các dữ liệu cần thiết cho việc xây dựng mô hình toán học. Vì thế, HS phát triển được kĩ năng phân tích và tổng hợp các dữ liệu của một bài toán.

- *Bước 2. Xây dựng mô hình toán học.* GV yêu cầu các nhóm vẽ hình biểu diễn các yếu tố của bài toán và thể hiện số đo của các cạnh và góc trên hình vẽ, sau đó cho biết bài toán ban đầu được chuyển về bài toán toán học nào? GV cũng lưu ý HS có thể vẽ góc có số đo 67° thay cho $67{,}7°$ bằng thước đo độ.

Câu trả lời mong đợi: Các nhóm vẽ được tam giác ABC và xác định được độ dài các cạnh $AB = 3000\ m; AC = 2000\ m;\ \hat{A} = 67{,}7^0$ (xem hình 1). Bài toán ban đầu được quy về bài toán tính độ dài cạnh BC của tam giác ABC khi biết độ dài hai cạnh AB, AC và số đo của góc A.

Kết quả làm bài của các nhóm như sau: các nhóm đều vẽ được tam giác ABC với số đo trên các cạnh và số đo của góc A đã cho, xác định đúng bài toán toán học cần giải quyết. Tuy nhiên, có một số hình tam giác của các nhóm vẽ chưa chính xác do chọn tỉ lệ xích không phù hợp. GV cần lưu ý cho HS dựng đúng số đo góc A và các cạnh của tam giác theo một tỉ lệ xích phù hợp, chẳng hạn $2 : 1000$, tức là $2cm$ trên hình vẽ thể hiện cho $1000m$ trong thực tế và yêu cầu các nhóm chỉnh sửa lại hình vẽ theo hướng dẫn.



Hình 1

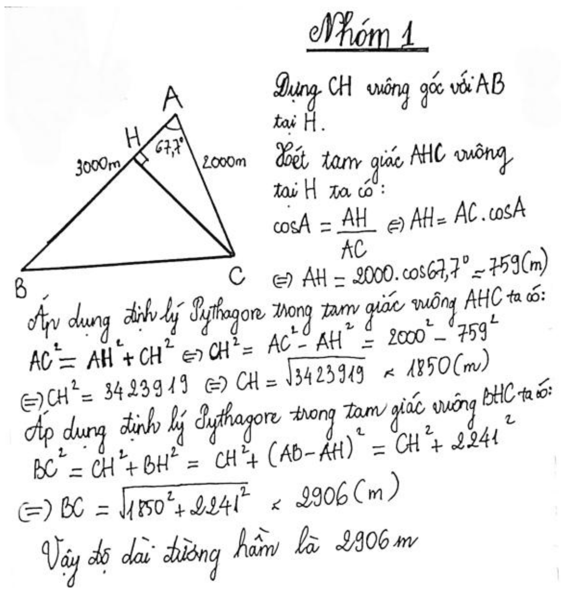
HS dựa trên các thông tin, dữ kiện và mối liên hệ giữa các dữ kiện để tiến hành xác định mô hình toán học, đó là tam giác ABC, đã biết độ dài cạnh AB, AC và góc xen giữa hai cạnh đó là $\widehat{BAC} = 67{,}7°$. Ở bước này, HS có nhiều cơ hội bồi dưỡng được biểu hiện 2 của năng lực MHHTH thông qua hoạt động vẽ tam giác ABC và xác định được số đo của hai cạnh AB và AC, góc $\widehat{BAC}$.

- *Bước 3. Giải bài toán toán học.* GV yêu cầu các nhóm giải bài toán toán học đã xác định được ở bước 2.

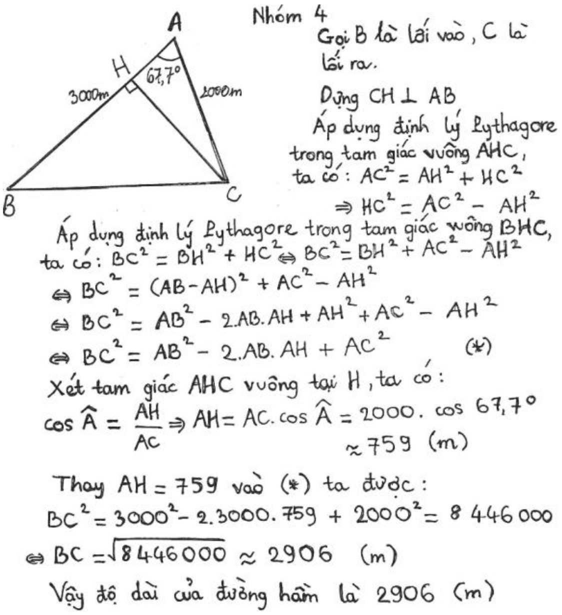
GV có thể hướng dẫn cho HS dựng đường cao để tạo tam giác vuông, sử dụng định lí Pythagore và tỉ số lượng giác để tính độ dài của cạnh BC. Kết quả bài làm của các nhóm: Hầu hết các nhóm đều cố gắng dựng thêm đường cao của tam giác ABC để tạo thành tam giác vuông, sử dụng định lí Pythagore và tỉ số lượng giác để tính độ dài của đường hầm. Chẳng hạn, trong hình 2 là bài làm của nhóm 1; bài làm của nhóm 4 thể hiện được tính tổng quát hơn và có khả năng phát triển thành định lí Côsin (xem hình 3). Do đó, GV yêu cầu nhóm 4 lên bảng trình bày và thuyết minh bài làm của nhóm mình trước lớp.

GV nêu nhận xét cách giải của nhóm 4 là đúng và đặt vấn đề tìm một cách khác hiệu quả và giải quyết nhanh hơn từ cách giải này. Tiếp theo, GV yêu cầu các nhóm từ cách giải tìm độ dài cạnh BC của nhóm 4, hãy tổng quát hóa cho bài toán tổng quát: *"Cho tam giác ABC, kẻ $CH \perp AB$, đặt $BC = a, AB = c, AC = b$. Tính a theo b, c và $cosA$"*. Kết quả bài làm của các nhóm cho thấy, có 8 nhóm đã đưa ra được lời giải tổng quát cho định lí Côsin; 3 nhóm còn lại không tuân thủ yêu cầu khi đã thay giá trị số của $cosA$ vào đẳng thức nên không đi đến định lí Côsin như mong đợi.

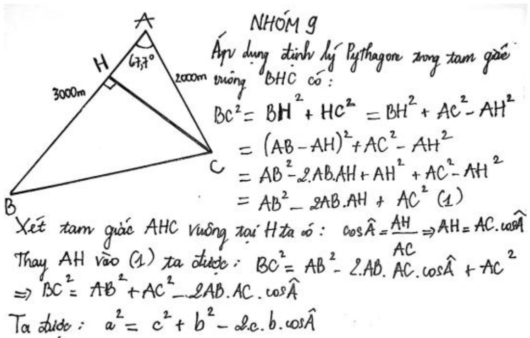
GV gọi nhóm 9 là nhóm có lời giải đúng lên bảng trình bày bài làm của nhóm mình (xem hình 4).



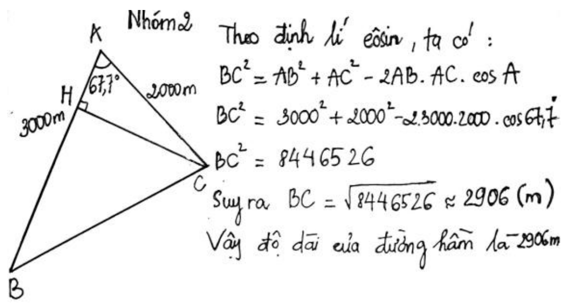
Hình 2. Bài làm của nhóm 1



Hình 3. Bài làm của nhóm 4 mang tính tổng quát



Hình 4. Bài làm của nhóm 9



Hình 5. Bài làm của nhóm 2

Tiếp theo, GV đặt $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.cosA$ (*). Sau đó, GV giới thiệu cho HS biết công thức (*) được gọi là định lí Côsin đối với cạnh BC trong tam giác ABC và yêu cầu các nhóm sử dụng định lí này để tính chiều dài đường hầm trong bài toán ban đầu. Kết quả bài làm của nhóm 2 (xem hình 5) đã tính đúng độ dài của cạnh BC.

Ở bước 3, HS đã biết vận dụng các kiến thức toán học như định lí Pythagore, tỉ số lượng giác trong tam giác vuông và định lí Côsin vào giải bài toán 1. HS có nhiều cơ hội bồi dưỡng được biểu hiện 3 của năng lực MHHTH với việc giải được bài toán toán học và phát triển thành định lí Côsin.

- *Bước 4. Diễn giải và xem xét tính hợp lí của kết quả trong bối cảnh thực tế.* GV yêu cầu các nhóm kiểm tra xem độ dài tìm được của cạnh BC có thỏa mãn điều kiện của bài toán toán học và phù hợp với bối cảnh thực tế hay không. Kết quả thu được: chỉ có 6 nhóm đã giải thích rằng độ dài $2906m$ của cạnh BC thỏa mãn các điều kiện của bài toán toán học như: số đo cạnh là số dương; thỏa mãn bất đẳng thức trong tam giác. Trong 6 nhóm đó, chỉ có nhóm 3 và nhóm 8 giải thích được rằng trong thực tế, chiều dài $2906m$ của đường hầm là phù hợp với kĩ thuật và công nghệ đào hầm xuyên núi vào năm 1962. Các nhóm còn lại chỉ giải thích được độ dài $2906m$ là số dương thỏa mãn điều kiện của bài toán.

GV đánh giá câu trả lời của hai nhóm 3 và 8 đã giải thích hợp lí nghiệm của bài toán toán học, yêu cầu các nhóm khác chỉnh sửa lại câu trả lời của nhóm mình. Ở bước này, HS có cơ hội bồi dưỡng được biểu hiện 3 của năng lực MHHTH với nhiệm vụ diễn giải kết quả của bài toán toán học và xem xét tính hợp lí của kết quả trong bối cảnh thực tế.

- *Bước 5. Trình bày giải pháp và trả lời cho bài toán thực tế ban đầu.* GV yêu cầu các nhóm trình bày lời giải đầy đủ, trả lời cho bài toán thực tế ban đầu là: "Độ dài của đường hầm là $2096m$". Ở bước này, HS có cơ hội bồi dưỡng được biểu hiện 3 của năng lực MHHTH.

Giai đoạn 2: Hình thành định lí Côsin. GV yêu cầu HS phát biểu bằng lời định lí Côsin trong tam giác. Sau đó, GV chỉnh sửa các phát biểu cho chính xác, đưa ra định lí Côsin: *Trong tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$.*

Tiếp đó, GV đưa ra câu hỏi làm thế nào để có thể tính được số đo của một góc trong tam giác ABC khi biết độ dài của ba cạnh $AB = c,\ AC = b,\ BC = a$? Câu trả lời mong đợi của HS: Từ định lí Côsin, suy ra công thức tính số đo một góc của tam giác khi biết độ của ba cạnh của tam giác đó là: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Kết quả là tất cả các nhóm đều trả lời đúng như mong đợi. GV lưu ý ba công thức trên gọi là hệ quả của định lí Côsin trong tam giác.

Giai đoạn 3: Củng cố kiến thức về định lí Côsin. GV phát phiếu học tập 2 có chứa nội dung bài toán 2 và yêu cầu HS vận dụng định lí Côsin để giải:

Bài toán 2: Một trạm điều khiển không lưu xác định khoảng cách từ một trực thăng đến hai máy bay khác là $50km$ và $72km$. Góc giữa hai khoảng cách này là 49°. Xác định khoảng cách giữa hai máy bay.

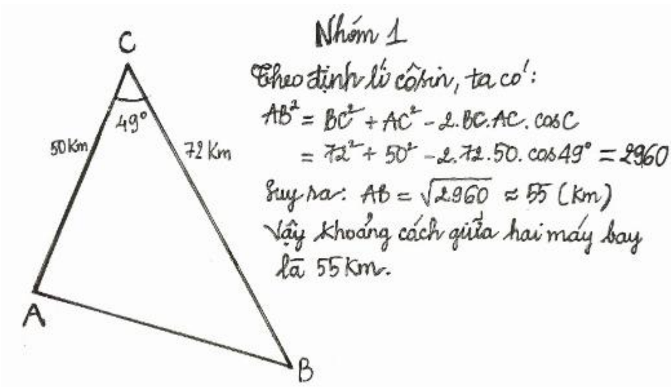
- *Bước 1. Xác định các dữ kiện của bài toán thực tế ban đầu:* GV yêu cầu các nhóm đọc, hiểu bài toán và trả lời các câu hỏi sau: (1) Yêu cầu của bài toán là gì?; (2) Liệt kê các dữ kiện cần thiết để giải quyết bài toán 2.

Kết quả bài làm của các nhóm: Cả 11 nhóm đều trả lời đúng như mong đợi là: (1) Yêu cầu của bài toán là xác định khoảng cách giữa hai máy bay; (2) Dữ kiện cần thiết: Khoảng cách từ trực thăng đến hai máy bay là $50km$ và $72km$; góc giữa hai khoảng cách này là 49°.

- *Bước 2. Xây dựng mô hình toán học*. GV yêu cầu các nhóm vẽ hình biểu diễn bài toán 2 với đầy đủ các dữ kiện cần thiết và cho biết bài toán ban đầu được quy thành bài toán toán học nào?. Kết quả thu được: Các nhóm đều vẽ đúng tam giác ABC với các dữ kiện cho trước. Mặt khác, các nhóm cũng xác định đúng bài toán toán học là tính độ dài cạnh AB của tam giác ABC khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo góc xen giữa hai cạnh đó.

- *Bước 3. Giải bài toán toán học*. GV yêu cầu các nhóm sử dụng định lí Côsin vào giải bài toán toán học đã xác định được ở bước 2. Kết quả thu được: Tất cả các nhóm đều sử dụng định lí Côsin trong tam giác ABC để tính độ dài cạnh AB là khoảng cách giữa hai máy bay. Trong các nhóm, nhóm 1 có lời giải đầy đủ và chính xác (xem hình 6). Do vậy, GV yêu cầu nhóm 1 lên bảng trình bày và giải thích cách làm trước cả lớp.

- *Bước 4. Diễn giải và xem xét tính hợp lí của kết quả trong bối cảnh thực tế*. GV yêu cầu các nhóm kiểm tra xem độ dài tìm được của cạnh AB có thỏa mãn các điều kiện của bài toán toán học và phù hợp với bối cảnh thực tế hay không. Kết quả thu được: có 9 nhóm đã giải thích rằng độ dài $55km$ của cạnh AB thỏa mãn các điều kiện của bài toán toán học, đó là: độ dài cạnh là số dương; độ dài các cạnh thỏa mãn bất đẳng thức trong tam giác. Các nhóm còn lại chỉ giải thích được độ dài $55km$ là số dương nên thỏa mãn điều kiện của bài toán. GV đánh giá có 9 nhóm đã giải thích hợp lí nghiệm của bài toán toán học, yêu cầu các nhóm khác chỉnh sửa lại câu trả lời của nhóm mình.



Hình 6. Bài giải đúng của nhóm 1

- *Bước 5. Hoàn thiện giải pháp và trả lời cho bài toán thực tế ban đầu*. GV yêu cầu các nhóm trình bày lời giải đầy đủ và chính xác với câu trả lời cho bài toán ban đầu là: *Khoảng cách giữa hai máy bay là $55km$.*

Thông qua hoạt động giải bài toán 2 theo trình tự các bước của quy trình MHHTH, từng biểu hiện của năng lực MHHTH của HS được bồi dưỡng đầy đủ: ở bước 1, HS được bồi dưỡng kĩ năng phân tích nội dung bài toán, từ đó xác định các dữ kiện cần thiết; ở bước 2, HS có cơ hội được bồi dưỡng biểu hiện 2 của năng lực MHHTH; ở bước 3, 4, 5 HS có nhiều cơ hội bồi dưỡng biểu hiện 3 thông qua việc tìm giải pháp, giải bài toán toán học dựa trên mô hình toán học, diễn giải ý nghĩa kết quả của bài toán toán học, xem xét tính hợp lí trong bối cảnh thực tế và trả lời cho bài toán thực tế ban đầu.

3. Kết luận

Kết quả dạy học thực nghiệm định lí Côsin ở Trường THPT Nguyễn Hữu Thọ, Quận 4, TP. Hồ Chí Minh cho thấy, HS đã vận dụng đầy đủ các bước của quy trình MHHTH dưới sự hướng dẫn của GV, sử dụng được các công cụ toán học, bao gồm định lí Pythagore, tỉ số lượng giác trong tam giác vuông và định lí Côsin để giải các bài toán thực tế. Trong quá trình dạy học, hoạt động MHHTH các bài toán thực tế giúp HS phát huy được năng lực cá nhân, năng lực làm việc nhóm, bồi dưỡng các biểu hiện của năng lực MHHTH thông qua quy trình MHHTH. Trên thực tế, có nhiều quy trình MHHTH được các nhà nghiên cứu đưa ra, đòi hỏi GV cần lựa chọn quy trình MHHTH phù hợp với yêu cầu của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 để có thể phát triển được đầy đủ các biểu hiện của năng lực MHHTH; do vậy, GV cần lựa chọn bài toán thực tế vừa gắn liền với nội dung dạy học, vừa phù hợp với quy trình MHHTH đã đưa ra. Với việc tiếp cận các bài toán có bối cảnh thực tế và thực hiện giải quyết các bài toán đó theo các bước của quy trình MHHTH, HS có nhiều cơ hội bồi dưỡng được năng lực MHHTH.

Tài liệu tham khảo

Barreto, A. C. (2010). *Reference Center for Mathematical Modeling in Teaching.* Brazilian Precursors.

Blomhoej, M., & Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications, 22,* 123-139.

Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

Đỗ Đức Thái (tổng chủ biên), Nguyễn Sơn Hà, Phạm Sỹ Nam, Vũ Đình Phượng, Nguyễn Thị Kim Sơn, Trần Quang Vinh (2020). *Dạy học phát triển năng lực môn Toán trung học phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm.

Edwards, D., & Hamson, M. (2001). *Guide to mathematical modelling.* Basingstoke: Palgrave.

Gürel, Z. Ç. (2023). Teaching mathematical modeling in the classroom: Analyzing the scaffolding methods of teachers. *Teaching and Teacher Education*, *132*(7), 104253.

Haines, C., & Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *20*(3), 129-138.

Henning, H., & Keune, M. (2004). Levels of modelling competencies. *New ICMI Study Series*, *10*, 225-232.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In *Mathematical Modelling* (pp. 110-119).

Kaur, B., & Dindyal, J. (2010). *Mathematical Applications and Modeling*. World Scientific Publishing, Singapore.

Lê Hồng Quang (2020). *Bồi dưỡng năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh trung học phổ thông trong dạy học Đại số*. Luận án tiến sĩ Khoa học giáo dục, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Lê Thị Hoài Châu, Nguyễn Thị Nhân (2019). Đánh giá năng lực mô hình hóa của học sinh trong dạy học chủ đề "Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số" ở lớp 12. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, *16*(12), 891-906.

Maab, K. (2006). What are modelling competencies? *The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113-142.

McAskill, B., Watt, W., Balzarini, E., Bonifacio, L., Carlson, S., Johnson, B., Kennedy, R., & Wardrop, H. (2011). *Pre-Calculus 11*. McGraw Hill.

Nguyễn Danh Nam (2016). *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*. NXB Đại học Thái Nguyên.

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2008). Research into the teaching and learning of applications and modelling in Australia. In *Research in Mathematics Education in Australasia 2004-2007* (pp. 141-164).