

HIỂU NHẦM KHÁI NIỆM CỦA HỌC SINH TRONG HỌC TẬP CHỦ ĐỀ “XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN” (TOÁN 12): MỘT NGHIÊN CỨU TRƯỜNG HỢP

Nguyễn Thị Duyên¹⁺,
Nguyễn Lộc Trường Tài²,
Nguyễn Thị Mai Thủy³

¹Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế; ²Trường THPT Long Phước,
huyện Long Thành, tỉnh Đồng Nai; ³Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
+ Tác giả liên hệ • Email: ntduyen@hueuni.edu.vn

Article history

Received: 25/3/2025

Accepted: 23/4/2025

Published: 20/6/2025

Keywords

Students, conditional
probability,
misunderstanding concepts,
Math 12

ABSTRACT

Probability is an important field with many applications in sciences and practice. Many professions require basic knowledge and reasoning about probability to make decisions on uncertainty-related problems. However, conditional probability is an abstract concept which causes many difficulties and misunderstandings for students when solving problems. This study aims to examine and classify the types of misperceptions related to the concept of conditional probability among grade 12 students when solving problems in a real-life context, subsequently pinpointing the issues for further research to overcome these misunderstandings. The research results emphasize the need for further research to seek effective teaching methods for the topic “Conditional probability” (Mathematics 12) to promote students' understanding and overcome their misperceptions.

1. Mở đầu

Trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, kiến thức về xác suất được đưa vào từ lớp 2 đến lớp 12. Mạch kiến thức xác suất bổ sung nhiều đơn vị kiến thức mới như nguyên lý xác suất, xác suất có điều kiện, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes, phân bố nhị thức, sơ đồ hình cây, bảng hai chiều, ... (Bộ GD-ĐT, 2018). Xác suất có điều kiện cùng với một số công thức xác suất liên quan như công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes, ... và ứng dụng của chúng trong thực tiễn đã được đưa vào chương trình môn Toán lớp 12. Yêu cầu cần đạt của chủ đề “Xác suất có điều kiện” ở lớp 12 phân hóa từ mức độ đơn giản đến phức tạp, bao gồm nhận biết khái niệm, giải thích ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc; sử dụng các kiến thức liên quan như sơ đồ cây, công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes vào giải các bài toán xác suất có điều kiện; vận dụng khái niệm xác suất có điều kiện để giải quyết một số tình huống thực tiễn (Bộ GD-ĐT, 2018).

Xác suất có điều kiện gắn với cách các cá nhân đối phó với sự không chắc chắn và cách họ sử dụng thông tin bổ sung để ước lượng cơ hội xảy ra của các biến cố nhằm điều chỉnh lại xác suất theo dự đoán ban đầu; giúp mỗi cá nhân hiểu được những rủi ro có thể xảy ra và đưa ra quyết định phù hợp với cuộc sống và nghề nghiệp. Điều này khiến xác suất có điều kiện trở thành một phần thiết yếu trong suy luận thống kê, liên quan đến các ngành như Y học, Luật, Giáo dục, Tâm lý học và các lĩnh vực chuyên môn khác (Díaz & Fuente, 2007). Tuy nhiên, các nghiên cứu trên thế giới đã chỉ ra rằng, quá trình học tập xác suất có điều kiện cũng gây ra không ít khó khăn và sai lầm cho HS; những khó khăn và thách thức này bắt nguồn từ tính trừu tượng của khái niệm và thói quen của người học khi giải quyết các vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện (Díaz et al., 2010). Do đó, tìm hiểu các hiểu nhầm khái niệm của người học khi giải quyết các vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện là cần thiết. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý luận thông qua tổng hợp tài liệu về các hiểu nhầm khái niệm của HS trong dạy học xác suất có điều kiện và phương pháp khảo sát để tìm kiếm dữ liệu trả lời cho câu hỏi nghiên cứu: Đặc trưng hiểu nhầm khái niệm của HS lớp 12 đối với chủ đề “Xác suất có điều kiện”, cụ thể là khi giải quyết các vấn đề có bối cảnh thực tế như thế nào?

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Hiểu nhầm khái niệm của học sinh trong dạy học xác suất có điều kiện

Thuật ngữ “hiểu nhầm khái niệm” chỉ sự không chính xác hoặc lỗi sai (Fujii, 2020). Tuy nhiên, hàm ý của hiểu nhầm khái niệm không ám chỉ lỗi sai từ góc nhìn của người học. Theo góc nhìn của người học, đó là một quan niệm hợp lý và phù hợp dựa trên kinh nghiệm của cá nhân trong các bối cảnh khác nhau, hoặc trong các hoạt động hằng ngày. Khi quan niệm của người học xung đột với các ý tưởng được chấp nhận trong khoa học, thuật ngữ “hiểu nhầm

khái niệm” sẽ được sử dụng. Cũng theo Fujii (2020), “hiểu nhầm khái niệm” không phải là một lỗi sai dễ dàng sửa chữa mà tồn tại dai dẳng bởi trong quan niệm của người học, nó vẫn khả thi trong một số lĩnh vực hoặc bối cảnh (Fujii, 2020). Do vậy, hiểu nhầm khái niệm của người học về một khái niệm nào đó bắt nguồn từ kinh nghiệm hạn chế và hoặc do nhận thức cảm tính của cá nhân.

Sự trừu tượng của khái niệm “Xác suất có điều kiện” cùng với sự đa dạng trong các phát biểu của vấn đề toán học và thực tiễn liên quan khiến người học ở nhiều bậc học mắc phải các hiểu nhầm khái niệm liên quan đến xác suất có điều kiện. Một số hiểu nhầm khái niệm đến từ cách hiểu sai của người học về khái niệm xác suất có điều kiện khi đánh giá khả năng xảy ra của một sự kiện (Díaz et al., 2010). Bên cạnh đó, một số hiểu nhầm khái niệm bắt nguồn từ các chương ngại khoa học luận hoặc chương ngại sự phạm mà người học mắc phải khi học xác suất theo tiếp cận cổ điển hoặc theo tiếp cận tần suất (Lê Thị Hoài Châu, 2010). Thống kê từ các nghiên cứu đã có, chúng tôi đưa ra một số hiểu nhầm khái niệm thường gặp của HS về xác suất có điều kiện thông qua bảng tóm tắt sau (xem bảng 1):

Bảng 1. Mã hóa hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện trong một số nghiên cứu

Nghiên cứu của tác giả/nhóm tác giả	Hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện	Mô tả
Díaz và cộng sự (2010)	Quan hệ “nhân quả” và điều kiện (CA)	Người học nhầm lẫn giữa quan hệ nhân quả và quan hệ có điều kiện. Nếu một sự kiện B là nguyên nhân của sự kiện A thì khi nào B xảy ra, A cũng xảy ra và $P(A B) = 1$. Tuy nhiên, nếu $P(A B) = 1$ thì không hàm ý rằng B là nguyên nhân của A .
Díaz và cộng sự (2010)	Trình tự thời gian (TA)	Hiểu nhầm giữa quan hệ nhân quả và quan hệ có điều kiện khi tin rằng một sự kiện không thể ảnh hưởng đến xác suất của một sự kiện xảy ra trước nó.
Batanero và Sánchez (2005)	Tính đồng bộ và có trình tự thời gian của các tình huống (SS)	Người học dùng quy tắc nhân bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây cho tình huống có trình tự thời gian, ngược lại mắc sai lầm khi dùng quy tắc cộng cho tình huống đồng bộ.
Tarr và Lannin (2005)	Trao đổi các sự kiện (EE)	Không nhận ra được việc trao đổi các sự kiện ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố, không phân biệt được $P(A B)$ và $P(B A)$.
Calderisi (2024)	Tỉ lệ cơ sở (BR)	Hiểu nhầm khái niệm liên quan đến tỉ lệ xảy ra khi tính xác suất có điều kiện của biến cố H với bằng chứng là biến cố E mà không xét đến tỉ lệ hay xác suất ban đầu của H .
Díaz và Fuente (2007)	Xác suất có điều kiện và xác suất của biến cố giao (IP)	Không phân biệt giữa các loại xác suất của biến cố, biến cố giao, biến cố có điều kiện.
Batanero và Sanchez (2005)	Bỏ qua biến cố điều kiện (CE)	Người học bỏ qua biến cố điều kiện B khi tính xác suất của biến cố A với điều kiện B đã xảy ra vì cho rằng, việc xảy ra biến cố B không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra biến cố A .
Díaz và Fuente (2007)	Tính độc lập của các biến cố (IE)	Không nhận thấy được tính độc lập và không độc lập của các biến cố nên đưa ra các quyết định không chính xác khi giải quyết các vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện.
Bryant và cộng sự (2018)	Yếu tố may rủi, cảm tính (GC)	Người học tin rằng một số tình huống xảy ra trong thực tế gắn với hiện tượng ngẫu nhiên không ước lượng được xác suất có điều kiện xảy ra của nó, mà gắn liền với yếu tố may rủi, siêu nhiên, thần linh, cảm tính.

2.2. Nghiên cứu về những hiểu nhầm khái niệm của học sinh trong học tập chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12)

2.2.1. Phương pháp nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Để tìm hiểu và phân loại hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện của HS lớp 12, chúng tôi đã thực hiện khảo sát 30 HS lớp 12 sau khi các em học xong chủ đề “Xác suất có điều kiện”. Các HS được lựa chọn ngẫu nhiên từ 3 trường THPT trên địa bàn TP. Huế là: Trường THPT Nguyễn Huệ, Trường THPT Hai Bà Trưng và Trường THPT Nguyễn Trường Tộ. Các HS tham gia vào khảo sát có điểm trung bình môn Toán lớp 10 và 11 đều đạt ở mức trung bình, khá và giỏi (10% trung bình, 60% khá và 30% giỏi). Thời gian khảo sát là tháng 12/2024.

Công cụ nghiên cứu: Dựa vào sự phân loại các kiểu hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện ở tiểu mục 2.1, chúng tôi sử dụng phiếu học tập gồm 12 câu hỏi để làm công cụ nghiên cứu; mỗi câu hỏi nhằm đánh giá hiểu nhầm khái niệm của HS liên quan đến xác suất có điều kiện. Trong bài báo này, chúng tôi tập trung tìm hiểu và phân loại hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện của HS lớp 12 khi giải các bài toán xác suất có điều kiện có bối cảnh thực tế. Bảng sau mô tả các kiểu hiểu nhầm khái niệm dự kiến người học mắc phải đối với các câu hỏi trong phiếu học tập (xem bảng 2).

Bảng 2. Các câu hỏi và các kiểu hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện dự kiến HS thường mắc phải

Câu hỏi	Hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện
Rút thăm trúng thưởng	
Câu 1: Có 7 phiếu giống nhau, trong đó có 01 phiếu trúng thưởng. Bảy người (trong đó có bạn An) sẽ lần lượt rút mỗi người một phiếu và không hoàn lại. An muốn là người rút phiếu đầu tiên vì nghĩ rằng người rút phiếu đầu tiên sẽ có cơ hội được phiếu trúng thưởng nhiều nhất. Theo các bạn, suy nghĩ của An có chính xác không? Hãy giải thích câu trả lời của bạn.	Hiểu nhầm về thứ tự thời gian nên cho rằng người rút phiếu lần đầu trúng phiếu trúng thưởng thì các người sau không còn cơ hội nữa, hoặc người rút thăm lần sau sẽ có cơ hội trúng thưởng cao hơn người rút đầu tiên (TA); sử dụng xác suất thông thường thay vì xác suất có điều kiện để tính xác suất trúng thưởng của từng người (IP).
Câu 2: Ba người cùng vào một cửa hàng điện tử và mỗi người muốn mua 01 chiếc điện thoại Iphone 15 nhân dịp cửa hàng đang chạy chương trình giảm giá cuối năm. Cửa hàng chỉ còn lại hai chiếc điện thoại Iphone 15 được giảm giá 10%. Để không làm mất lòng khách hàng, người bán hàng đã đưa ra 3 phiếu mua hàng giống nhau, trong đó có hai phiếu được giảm giá. Ba khách hàng lần lượt rút mỗi người một phiếu và không hoàn lại. Nếu khách hàng nào rút được phiếu mua hàng giảm giá thì sẽ được mua được Iphone 15 giảm giá 10%. Cách làm này có công bằng với ba khách hàng hay không? Vì sao?	Hiểu nhầm về thứ tự thời gian nên cho rằng người rút phiếu lần đầu và lần 2 trúng phiếu giảm giá thì người thứ 3 sẽ không còn cơ hội nữa, hoặc người rút thăm lần đầu sẽ có cơ hội trúng phiếu giảm giá cao hơn hai người còn lại, khi người đầu trúng phiếu giảm giá thì hai người còn lại sẽ rút trúng phiếu giảm giá với xác suất là 50% (TA); sử dụng xác suất thông thường thay vì xác suất có điều kiện để tính xác suất trúng thưởng của từng người (IP).
Tính công bằng của trò chơi	
Câu 3: Giả sử bạn đứng trước ba ô cửa, biết rằng có hai ô mà bên trong mỗi ô có một con dê và một ô mà bên trong có chứa một chiếc xe hơi rất giá trị. Bạn mong muốn mở trúng ô cửa có chiếc xe để được nhận. Ông Monty yêu cầu bạn chọn một trong ba ô cửa. Ông sẽ giúp bạn loại trừ một đáp án sai bằng cách mở một ô cửa có dê trong hai ô cửa còn lại (dĩ nhiên ông ta đã biết mỗi ô cửa có gì). Sau đó, bạn được lựa chọn lần 2 là giữ nguyên ô cửa ban đầu hay đổi sang ô cửa còn lại chưa được lật mở? Hãy giải thích quyết định của bạn.	Quyết định không đổi ô cửa đã chọn vì hiểu sai cơ hội sẽ chia đều là 50% cho mỗi ô cửa sau khi Monty đã mở ra một ô cửa có con dê; người học cho rằng đổi sang ô còn lại thì xác suất trúng chiếc xe là 50% và trúng con dê là 50% nên không cần đổi ô cửa (SS).
Câu 4: Trong một tiết học xác suất, GV yêu cầu HS tạo ra một trò chơi để hiểu thêm về khái niệm xác suất có điều kiện. HS nào nghĩ ra được trò chơi hay sẽ được nhận điểm cộng. Bạn An đã đưa ra trò chơi như sau: An đặt vào một chiếc túi kín 10 viên bi giống nhau, trong đó có 5 bi xanh, 5 bi đỏ và lắc đều túi. An mời bạn Bình tham gia trò chơi bằng cách yêu cầu bạn Bình lấy 2 viên từ túi, mỗi lần một viên và không hoàn lại với quy ước nếu hai viên cùng màu thì Bình sẽ thắng, nếu chúng khác màu thì An sẽ thắng. Nếu bạn là Bình thì bạn có tham gia trò chơi này không? Giải thích sự lựa chọn của bạn.	Hiểu nhầm về trình tự thời gian của các biến cố (TA), nhầm lẫn giữa biến cố giao và biến cố có điều kiện để đo lường khả năng thắng cuộc của trò chơi (IP).
Bối cảnh khoa học và cuộc sống (giao thông, sinh học, y học...)	
Câu 5: Một chiếc xe taxi gây tai nạn vào ban đêm. Biết rằng có hai hãng taxi là taxi Vàng và taxi Xanh hoạt động trong thành phố, trong đó 85% là taxi Vàng và 15% là taxi Xanh. Một nhân chứng xác định chiếc xe gây tai nạn là taxi Xanh. Tuy nhiên quan tòa đã kiểm tra độ tin cậy của nhân chứng trong cùng hoàn cảnh của đêm xảy ra tai nạn và kết luận rằng nhận định của nhân chứng chỉ đúng trong 80% trường hợp và sai 20% trường hợp. Hỏi xe taxi gây tai nạn có khả năng là của hãng taxi nào trong hai hãng taxi trên. Giải thích câu trả lời của bạn.	Chỉ dựa vào quan sát của nhân chứng hoặc khẳng định của quan tòa để đưa ra nhận định về khả năng xe nào gây tai nạn cao hơn mà bỏ qua tỉ lệ cơ sở ban đầu (BR); sử dụng xác suất của biến cố giao thay vì biến cố hợp để đưa ra nhận định về xe nào có khả năng gây tai nạn cao hơn (IP).
Câu 6: Những đặc điểm di truyền từ thế hệ này sang thế hệ khác được mang bởi gen. Đối với một loại cây đậu nhất định, màu sắc của hoa do cây tạo ra (màu đỏ hoặc màu trắng) được xác định bởi một cặp gen. Mỗi gen thuộc loại C (gen trội) hoặc c (gen lặn). Cây mà cả hai gen đều là c (mang gen cc) tạo ra hoa màu trắng. Tất cả các cây khác có kiểu gen CC, Cc tạo ra hoa màu đỏ. Khi lai hai cây, cây con nhận được gen từ bố và mẹ; nếu một gen từ bố thuộc gen Cc thì cả hai alen C và c có khả năng di truyền cho cây con là như nhau. Giả sử có một lứa đậu Hà Lan ra hoa màu đỏ, trong đó 60% có kiểu gen Cc và 40% có kiểu gen CC. Chọn ngẫu nhiên một cây và lai nó với một cây đậu có hoa màu trắng. Bạn Bình nói rằng khả năng để cây con có hoa màu đỏ cao gấp 3 lần hoa màu trắng. Bạn có đồng ý với bạn Bình không? Vì sao?	Không hiểu cơ chế lai và sự phân chia của các Alen nên bỏ qua (GC); bỏ qua tỉ lệ cơ sở mà chỉ quan tâm khi lai cây hoa đỏ và hoa trắng thì chỉ có thể cho ra hoa đỏ hoặc trắng nên cho rằng, xác suất cây ra hoa đỏ và hoa trắng là như nhau (BR); chỉ chú ý đến ba kiểu gen là CC, Cc, cc và tính trạng hoa của kiểu gen CC, Cc là đỏ và cc là trắng nên cho rằng xác suất để ra hoa đỏ là 2/3 (IP).
Câu 7: Trong kì thi tốt nghiệp THPT, ở lớp chuyên toán có 60% HS lựa chọn tổ hợp A00. Biết rằng, nếu một HS chọn tổ hợp A00 thì xác suất để HS đó đỗ đại học top đầu là 0,7; còn nếu một HS không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để HS đó đỗ	Bỏ qua tỉ lệ cơ sở mà chỉ sử dụng tỉ lệ đậu đại học của nhóm HS chọn các khối để đưa ra kết luận (BR); sử dụng xác suất có biến cố giao thay

đại học top đầu là 0,8. Chọn ngẫu nhiên một HS của lớp chuyên toán đã tốt nghiệp THPT trong kì thi trên. Biết rằng HS này đã đỗ đại học. Bạn An nói rằng khả năng HS này đã chọn tổ hợp khác A00. Em có đồng ý với ý kiến của bạn An không, vì sao?	vì xác suất có điều kiện để đưa ra nhận định liên quan đến vấn đề chọn khối thi (IP).
Câu 8: HBsAg là xét nghiệm quyết định chẩn đoán viêm gan B. Tuy nhiên, có một số trường hợp xuất hiện hiện tượng dương tính giả, nghĩa là người đi xét nghiệm không mắc viêm gan B nhưng xét nghiệm vẫn cho kết quả dương tính. Trong trường hợp này, cần tiến hành xét nghiệm khẳng định bằng xét nghiệm trung hòa hoặc thử nghiệm với một xét nghiệm chuẩn khác. Ngược lại, có một số người bệnh mắc viêm gan B nhưng kết quả xét nghiệm lại âm tính. Đó là các trường hợp âm tính giả. Nguyên nhân âm tính giả có thể là do lỗi kĩ thuật hoặc sử dụng các xét nghiệm có độ nhạy thấp, không có khả năng phát hiện bệnh nhân có nồng độ HBsAg thấp. Do vậy, cần thử lại với các xét nghiệm có độ nhạy cao để có kết luận cuối cùng. Một cuộc kiểm tra sức khỏe ở một cơ quan cho thấy, 10% số người cho kết quả dương tính với viêm gan B. Kết quả xét nghiệm chuyên sâu sau đó cho thấy, tỉ lệ người bị kết luận dương tính và âm tính với viêm gan B thực sự mắc bệnh viêm gan B là 97% và 3%. Chọn một người tham gia đợt kiểm tra sức khỏe, tìm xác suất để người tham gia đợt kiểm tra có xét nghiệm ban đầu là dương tính với viêm gan B, biết người đó thật sự mắc bệnh này.	Không phân biệt được vấn đề dương tính giả và âm tính giả nên hiểu nhầm bị bệnh viêm gan B thì xét nghiệm luôn cho kết quả dương tính (CA); bỏ qua tỉ lệ cơ sở (BR).
Câu 9: Tại Việt Nam hiện nay, tỉ lệ người mắc bệnh đái tháo đường đang gia tăng nhanh. Bệnh không chỉ xuất hiện ở khu vực đô thị mà còn xuất hiện ở hầu khắp các khu vực từ miền núi, trung du đến đồng bằng. Bệnh thường được chẩn đoán, điều trị muộn nên dẫn đến nhiều biến chứng nguy hiểm. Người lớn tuổi có nguy cơ bị mắc bệnh tiểu đường càng cao. Một khảo sát thống kê được tiến hành với những người trên 50 tuổi trong một cộng đồng dân cư đã phát hiện ra rằng, tỉ lệ mắc bệnh tiểu đường và cao huyết áp lần lượt là 20% và 30%. Tỉ lệ dân cư không bị cao huyết áp mắc bệnh tiểu đường là 10%. Chọn ngẫu nhiên một cư dân trên 50 tuổi trong cộng đồng này. Hỏi việc mắc bệnh tiểu đường có làm tăng nguy cơ bị cao huyết áp của cư dân trên 50 tuổi trong cộng đồng đó không? Giải thích câu trả lời của bạn.	Bỏ qua tỉ lệ cơ sở khi tìm kiếm mối liên hệ (BR); dùng hiểu biết ban đầu của cá nhân để rút ra kết luận mà không dựa vào biến cố điều kiện (GC); hiểu nhầm giữa xác suất có điều kiện và xác suất của biến cố giao (IP); không đánh giá được tính không độc lập của các biến cố (IE); đảo ngược các sự kiện (EE).
Câu 10: Vào thời điểm giao mùa thu đông, người cao tuổi thường mắc phải nhiều bệnh. Một cuộc khảo sát thống kê được tiến hành với 1000 bệnh nhân trên 60 tuổi đi khám tại một bệnh viện ở TP. Hồ Chí Minh cho thấy, có đến 700 người bị viêm xương khớp và 500 người bị viêm phế quản khi thời tiết giao mùa. Biết rằng, việc mắc bệnh viêm xương khớp và viêm phế quản của người cao tuổi là độc lập với nhau. Các bác sĩ đã tiến hành dùng thử nghiệm hai loại thuốc để chữa trị hai bệnh trên cho các bệnh nhân cao tuổi. Với thuốc T1, tỉ lệ chữa khỏi bệnh viêm xương khớp, bệnh viêm phế quản và cả hai bệnh viêm xương khớp và viêm phế quản lần lượt là 80%; 60% và 30%, còn đối với thuốc T2, các khả năng đó lần lượt là 60%; 70% và 40%. Vậy, sau đợt thử nghiệm, bác sĩ nên dùng loại thuốc nào để hiệu quả chữa bệnh cho các bệnh nhân cao tuổi? Giải thích câu trả lời của bạn.	Bỏ qua tính độc lập của các biến cố nên hiểu sai số người bị cả hai loại bệnh dẫn đến sai về tỉ lệ cơ sở (IE); hiểu nhầm 1000 người đến khám đều mắc một trong hai loại bệnh nên tính sai số người mắc một trong hai bệnh dẫn đến sai tỉ lệ cơ sở (BR); không nhận ra yêu cầu bài toán đưa về việc tính xác suất có điều kiện với biến cố điều kiện là biến cố hợp (IP).
Câu 11: Nam nói rằng, nếu mẹ của Alisa có màu mắt xanh thì khả năng Alisa có màu mắt xanh sẽ cao hơn nếu Alisa có màu mắt xanh thì mẹ của Alisa có màu mắt xanh. Em có đồng ý với ý kiến của bạn Nam không? Vì sao?	Nhận thức xác suất có điều kiện như một mối quan hệ nhân quả nên người học cho rằng xác suất để con có màu mắt xanh khi biết mẹ có màu mắt xanh sẽ lớn hơn xác suất mẹ có màu mắt xanh khi đã biết con có màu mắt xanh, trong lúc xác suất của hai biến cố này là ngang nhau (CA).
Câu 12: Hộp thứ nhất có 6 viên socola màu hồng và 4 viên socola màu nâu. Hộp thứ 2 có 7 viên socola màu hồng và 3 viên socola màu nâu. Bạn Hải bốc một viên socola từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ 2. Sau đó bốc một viên socola từ hộp thứ 2 thì đó là viên socola màu hồng. Hải cho rằng, lúc đó khả năng bạn ấy bốc được viên socola màu hồng từ hộp thứ nhất là 60%. Em có đồng ý với ý kiến của bạn Hải không? Vì sao?	Người học từ chối giải quyết vấn đề vì tin rằng khi thực hiện liên tiếp hai hoạt động thì chỉ có kết quả của hoạt động thứ nhất ảnh hưởng đến kết quả của hoạt động thứ hai chứ không thể có chiều ngược lại, vì hoạt động thứ nhất đã được tiến hành trước khi tiến hành hoạt động thứ hai, kết quả của sự kiện xảy ra sau không ảnh hưởng đến sự kiện xảy ra trước đó (TA) nên chọn $P(A)$ thay vì $P(A B)$.

Thu thập và phân tích dữ liệu: HS tham gia khảo sát trả lời 12 câu hỏi liên quan đến xác suất có điều kiện được trình bày ở bảng 2 trong khoảng thời gian 90 phút. Phiếu bài làm của HS sẽ được thu thập và phân tích về các hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện mà các em mắc phải. Chúng tôi sẽ đếm số lượt hiểu nhầm khái niệm xuất

hiện trong bài làm của 30 HS dựa trên bảng mô tả hiểu nhầm khái niệm đã dự kiến ở bảng 2. Sau đó, tính tỉ lệ % số lượt hiểu nhầm khái niệm xuất hiện trong bài làm của HS và đưa ra nhận xét về kiểu hiểu nhầm khái niệm nào xuất hiện phổ biến hay ít phổ biến trong nhận thức của các em.

2.2.2. Kết quả nghiên cứu và bàn luận

Dữ liệu thu được từ khảo sát cho thấy, hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện của HS lớp 12 khi giải các bài toán thực tế khá đa dạng. Bảng sau mô tả chi tiết các hiểu nhầm khái niệm xuất hiện trong nhận thức của HS lớp 12 khi giải các bài toán có bối cảnh thực tế (xem bảng 3):

Bảng 3. Phân loại hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện của HS tham gia khảo sát

Mã	CA	TA	SS	EE	BR	IP	CE	IE	GC
Số lượt	15	35	6	5	8	18	36	32	5
Tỉ lệ %	9%	22%	4%	3%	5%	11%	23%	20%	3%

“Bỏ qua biến cố điều kiện” (CE) là hiểu nhầm khái niệm phổ biến nhất (chiếm 23%) khi người học đưa ra các quyết định liên quan đến các vấn đề xác suất có điều kiện có bối cảnh thực tế mà không căn cứ vào các thông tin đã được cung cấp trước đó. Chẳng hạn với tình huống xe taxi gây tai nạn giao thông, HS đưa ra kết luận cảm tính mà không dựa vào bất cứ thông tin nào về tỉ lệ cơ sở ban đầu (xem hình 1). HS lớp 12 hiểu nhầm về “Trình tự thời gian” (TA) nhiều thứ hai (chiếm 22%) khi giải các bài toán thực tế liên quan đến xác suất có điều kiện. Đa số HS đều lúng túng và có xu hướng từ chối giải quyết vấn đề liên quan đến trình tự thời gian vì cho rằng, biến cố A đã xảy ra trước khi xảy ra biến cố B, do đó thông tin về biến cố B có sau sẽ không ảnh hưởng đến xác suất của biến cố A.

Trong trường hợp chấp nhận giải quyết vấn đề đặt ra, HS có xu hướng lựa chọn $P(A)$ thay vì $P(A|B)$ khi ước lượng xác suất xảy ra của các biến cố với điều kiện đã cho trước. Kết quả ở hình 2 thể hiện nhận thức sai lầm của HS liên quan đến tình huống bóc kẹo socola.

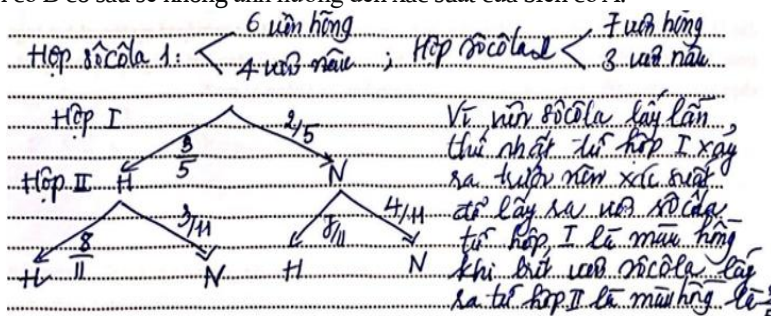
“Tráo đổi các sự kiện” (EE) và “Yếu tố may rủi, cảm tính” (GC) của xác suất là hai hiểu nhầm khái niệm mà HS mắc phải ít nhất (chiếm 3%) khi giải quyết các vấn đề thực tế liên quan đến xác suất có điều kiện. Một số HS đã tráo đổi các biến cố khi xử lí số liệu dẫn đến việc các em đưa ra các quyết định thiếu chính xác do không căn cứ vào thông tin đã được cung cấp trước đó. HS sau đã tráo đổi hai biến cố “dân cư không bị cao huyết áp” và “dân cư bị tiểu đường” cho giả thiết bài toán “tỉ lệ dân cư không bị cao huyết áp mắc tiểu đường là 10%” nên dẫn đến sai lầm khi xác định xác suất của cư dân bị cao huyết áp nếu biết cư dân đó đã bị tiểu đường (xem hình 3).

Xác suất có điều kiện có “Yếu tố may rủi, cảm tính” cũng là hiểu nhầm mà người học ít mắc phải nhất (chiếm 3%). Điều này dẫn đến việc HS đưa ra cách giải quyết vấn đề thiếu căn cứ, cảm tính và trực giác mà không có bất kì suy luận xác suất nào. Đặc biệt, trong các vấn đề liên quan đến rút thăm trúng thưởng, một số HS đưa ra cách xử lí cảm tính vì tin rằng việc xảy ra của một biến cố nào đó là do may rủi chứ không ước lượng được (xem hình 4, trang bên).

Một số HS hiểu nhầm giữa quan hệ nhân quả và quan hệ điều kiện nên đưa ra lí giải thiếu căn cứ cho quyết định của bản thân. Chẳng hạn với tình huống màu mắt, HS cho rằng nếu mẹ của Alisa có màu mắt xanh thì xác suất để Alisa có màu mắt xanh sẽ cao hơn nếu Alisa có màu mắt xanh thì mẹ của Alisa có màu mắt xanh. HS lập luận rằng màu mắt của Alisa có thể được di truyền từ bố hoặc từ mẹ nên nếu Alisa có màu mắt xanh thì có khả năng bố của Alisa có màu mắt xanh, trong khi đó mẹ của Alisa không có màu mắt xanh. Lập luận này dẫn đến sai lầm vì xác suất của hai biến cố đó đều bằng nhau (xem hình 5, trang bên).

Xe gây tai nạn có khả năng là bằng taxi xanh. Tuy nhiên trong thực tế không đưa vào 2 để kết luận xe nào gây tai nạn vì 2 điều đó không có bằng chứng thì không nên kết luận

Hình 1. Hiểu nhầm khái niệm của HS về tỉ lệ cơ sở



Hình 2. Hiểu nhầm khái niệm của HS về trình tự thời gian

HD: dân đường, HA: huyết áp
 $P(HD | HA) = 0,1$
 $\Rightarrow P(HA | HD) = 0,9$
Nhiều mắc tiểu đường làm tăng nguy cơ cao huyết áp

Hình 3. Hiểu nhầm khái niệm của HS về tráo đổi biến cố có điều kiện

Theo em suy nghĩ của An không chính xác. Vì 7 phiếu giống nhau và chỉ có 1 phiếu khác thường. Tỷ lệ trúng thưởng của An chỉ là $\frac{1}{7} \approx 0,143$, nên xác An là người sút phiếu đầu tiên có cơ hội hay không chỉ dựa vào may mắn. Tuy nhiên nếu An không may mắn thì tỷ lệ trúng thưởng của người sau sẽ tăng lên.

Hình 4. Hiểu nhầm khái niệm của HS về tính may rủi của xác suất

Như vậy, HS mắc khá nhiều hiểu lầm khái niệm khi giải các bài toán xác suất có điều kiện có bối cảnh thực tế, trong đó phổ biến nhất là các hiểu nhầm liên quan đến việc bỏ qua biến cố điều kiện, trình tự thời gian xảy ra các biến cố và tính độc lập của các biến cố. Các hiểu nhầm liên quan đến trao đổi các biến cố, yếu tố may rủi, cảm tính của xác suất có điều kiện, tính đồng bộ và trình tự thời gian của các biến cố xảy ra ít trong quá trình HS giải quyết vấn đề có bối cảnh thực tế.

3. Kết luận

Kết quả của bài báo cho thấy, hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện của HS khi giải bài toán có bối cảnh thực tế khá đa dạng. HS có xu hướng bỏ qua biến cố điều kiện mà chỉ quan tâm đến số liệu cụ thể khi đưa ra ước lượng về xác suất của biến cố có điều kiện (Batanero & Sanchez, 2005). Hiểu nhầm này bắt nguồn từ thói quen tính xác suất thông thường của HS. Ngược lại, khi tính xác suất có điều kiện, HS cần dựa trên số liệu về biến cố đã xảy ra trước đó nên những thói quen tính xác suất thông thường trở thành chướng ngại, cản trở người học nhận thức đúng đắn về bản chất của xác suất có điều kiện. HS cũng mắc sai lầm phổ biến liên quan đến trình tự thời gian xảy ra các biến cố, các em không thực hiện nhiệm vụ học tập được giao vì tin rằng các biến cố xảy ra theo một trình tự thời gian nhất định nên biến cố xảy ra sau không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố trước đó. Nhận thức sai lầm này của HS cũng phù hợp với kết quả của các nghiên cứu trước đây liên quan đến sai lầm của HS về xác suất có điều kiện (Díaz et al., 2010). Một số HS lớp 12 vẫn tin vào sự may rủi khi giải quyết các vấn đề liên quan đến tính công bằng của trò chơi hoặc bốc thăm trúng thưởng. Từ việc tìm hiểu các hiểu nhầm khái niệm về xác suất có điều kiện của HS tham gia vào khảo sát, theo chúng tôi cần thực hiện thêm các nghiên cứu để tìm kiếm biện pháp dạy học hiệu quả chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12) nhằm thúc đẩy hiểu biết của HS và khắc phục hiểu nhầm khái niệm của các em về chủ đề này.

Xác suất nếu Alisa có một mái xanh giống mẹ là: $\frac{1}{2}$ (vì Alisa có thể giống mẹ hoặc giống bố). Khi Alisa có một mái xanh thì cô phải mang bố Alisa 2 mái xanh nhưng mẹ Alisa không có một mái xanh. Tương hợp có bố và mẹ đều có một mái xanh thì Alisa sẽ mái xanh.

Hình 5. Hiểu nhầm khái niệm của HS về quan hệ nhân quả và điều kiện

Lời cảm ơn: Nhóm tác giả cảm ơn sự tài trợ của Quỹ Khoa học và Công nghệ Đại học Huế qua đề tài “Niềm tin và sự thích ứng của giáo viên toán trung học phổ thông khi dạy học xác suất theo hướng phát triển năng lực người học” mã số: DHH2024-03-189.

Tài liệu tham khảo

- Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the Nature of High School Students' Conceptions and Misconceptions About Probability?. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). Boston, MA: Springer US.
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Bryant, P., Nunes, T., Evans, D., Barros, R., Gottardis, L., & Terlektsi, E. (2018). What 9-and 10-year old pupils already know and what they can learn about randomness. In *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 161-179).
- Calderisi, M. (2024). On the Reality of the Base-Rate Fallacy: A Logical Reconstruction of the Debate. *Review of Philosophy and Psychology*, 16(01), 285-303. <https://doi.org/10.1007/s13164-023-00712-x>
- Díaz, C., & Fuente, D. L. (2007). Assessing psychology students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(02), 128-148.
- Díaz, C., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 26(02), 149-162.
- Fujii, T. (2020). Misconceptions and alternative conceptions in mathematics education. In book: *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 625-627).
- Lê Thị Hoài Châu (2010). Những chướng ngại, khó khăn trong dạy học khái niệm xác suất. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 24, 115-121.
- Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence?. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). Boston, MA: Springer US.