# MỘT SỐ SAI LẦM THƯỜNG GẶP CỦA HỌC SINH TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ "PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PHƯƠNG TRÌNH" (ĐẠI SỐ 10) Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

**Lê Văn Giàu[1,+], Nguyễn Dương Hoàng[2]**

[1]Học viên cao học K27, Trường Đại học Cần Thơ;
[2]Trường Đại học Đồng Tháp
+ *Tác giả liên hệ ● Email: lvgiau98@gmail.com*

**Article history**
Received: 20/01/2022
Accepted: 18/02/2022
Published: 05/3/2022

**Keywords**
Common mistakes, equations, inequalities, high school

**ABSTRACT**

In the process of teaching Mathematics, helping students realise and rectify mistakes would create favorable conditions for them to inculcate learnt knowledge and apply it to solve new problems, avoid making mistakes. This study points out some common mistakes of students in learning the topic "Equations - Inequalities" (Algebra 10), and also proposes some suggestions for them to rectify those mistakes. Then, the author proposes some recommendations for teachers to help students improve their ability to detect and correct their mistakes. Teachers need to understand the causes of students' mistakes to come up with appropriate measures and teaching methods to help them correct mistakes effectively.

## 1. Mở đầu

Hiện nay, trong dạy học giải toán ở trường phổ thông, HS còn mắc nhiều sai lầm. Có nhiều nguyên nhân dẫn đến sai lầm của HS, chẳng hạn: HS thường giải toán theo bài mẫu mà chưa hiểu rõ vấn đề; còn mơ hồ, chưa nắm vững kiến thức đã học; không cẩn trọng trong quá trình giải toán,... Các nhà khoa học cho rằng, cần nhấn mạnh vai trò và sự cần thiết của việc sửa chữa sai lầm cho HS trong quá trình học tập. Theo Stoliar (1969): Không nên tiếc thời gian để phân tích trong giờ học các sai lầm của HS. Theo Hodes và Nolting (1998), GV cần: - Thừa nhận quyền bị sai lầm của HS; - Cố gắng hiểu về sai lầm đã xảy ra đối với HS. Quá trình tiếp thu tri thức sẽ hiệu quả hơn nếu người học biết tự phân tích và sửa chữa những sai lầm mắc phải, giúp các em hiểu sâu và nhớ lâu kiến thức. Để tìm được sai lầm trong các lời giải bài toán, người học cần phân tích từng bước, đối chiếu, so sánh với các kiến thức toán học đã có từ trước. Từ đó, người học sẽ nắm được nguyên nhân của những sai lầm và bản chất của vấn đề.

Đến nay, đã có nhiều nghiên cứu về sai lầm của HS trong quá trình giải toán nhưng ở các góc độ và đối tượng cụ thể khác nhau. Hoàng Thị Ngọc Ánh và Đỗ Thị Trinh (2019) đã trình bày một số dạng sai lầm của HS và đưa ra hướng khắc phục khi giải toán xác suất cho HS lớp 11. Dương Hữu Tòng (2017) đã đưa ra những dự đoán và giải thích nguyên nhân dẫn đến sai lầm của HS trong dạy học chủ đề Phân số dưới ngôn ngữ của didactic toán. Đinh Hải Tâm và Nguyễn Văn Thà (2018) đã phân tích và chỉ ra những sai lầm thường gặp của HS khi giải bài tập chương "Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số" (Giải tích 12). Nguyễn Thị Quyên (2017) đã đưa ra một số sai lầm thường gặp của HS lớp 9 khi giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn,… Ưu điểm của các kết quả nghiên cứu này là giúp người đọc dễ vẫn dụng những kiến thức vào thực tiễn giảng dạy và nghiên cứu.

Dưới đây, sau phần trình bày quan niệm về sai lầm, chúng tôi sẽ trình bày một số sai lầm thường gặp của HS trong dạy học chủ đề "Phương trình - Bất phương trình" (Đại số 10) ở trường THPT, từ đó đề xuất một số hướng cho GV trong dạy học chủ đề này nhằm rèn luyện cho HS khả năng tự phát hiện cũng như sửa chữa sai lầm của mình, góp phần nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán.

## 2. Kết quả nghiên cứu

### *2.1. Quan niệm về "sai lầm"*

Theo Polya (1997): Con người phải biết học ở những sai lầm và thiếu sót của mình. Không nên tiếc thời gian để phân tích trên giờ học các sai lầm của HS (Stoliar, 1969). Theo Hoàng Phê (2008): Sai lầm là trái với yêu cầu khách quan hay trái với lẽ phải, dẫn đến những hậu quả không hay. Theo đó, mục tiêu dạy học một kiến thức nên được phân nhỏ thành các mục tiêu bộ phận để sao cho HS có thể lĩnh hội kiến thức bằng cách lần lượt từ đơn giản đến phức tạp mà không phạm sai lầm.

Trong quá trình lĩnh hội kiến thức, nếu có sự xuất hiện của sai lầm tức là xuất hiện sự mất cân bằng trong vấn đề tư duy của HS. Do đó, việc nhận ra sai lầm và khắc phục sai lầm sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho HS cân bằng lại kiến thức và hình thành kiến thức mới một cách tốt nhất. Theo Bessot và cộng sự (2009): Chúng ta đã đặt vào hai bên đối lập, một bên là học thuyết hành vi dựa trên sự củng cố đến từ bên ngoài, được coi là nhân tố chủ yếu của sự phát triển kiến thức. Học thuyết này coi sai lầm là sự phản ảnh của sự thiếu hiểu biết, do vô ý hay bất cẩn mà thôi. Bên kia, học thuyết kiến tạo gán sai lầm và sự nhận ra sai lầm có vai trò mang tính xây dựng trong hoạt động nhận thức, vì khi tạo ra sự mất cân bằng trong hệ tư duy của chủ thể, việc nhận ra sai lầm làm nảy sinh một thể cân bằng mới và kiến thức mới được hình thành.

Quá trình tiếp thu tri thức sẽ hiệu quả hơn nếu người học tự phân tích những sai lầm đã mắc phải. Để tìm được sai lầm trong các lời giải, người học cần phân tích từng bước, đối chiếu, so sánh với các kiến thức toán học đã có từ trước. Như vậy, có thể thấy, việc khắc phục những sai lầm trong học tập cho người học là rất cần thiết, học hỏi qua sai lầm cũng là một cách hiệu quả giúp người học hiểu sâu, tránh được những sai lầm có thể gặp phải khi giải quyết vấn đề (Lê Bình Dương và Nguyễn Thị Hậu, 2019).

***2.2. Một số sai lầm thường gặp của học sinh trong dạy học chủ đề "Phương trình - Bất phương trình" (Đại số 10) ở trường trung học phổ thông***

*2.2.1. Sai lầm khi biến đổi các phương trình tương đương chứa dấu giá trị tuyệt đối*

*Ví dụ 1:* Giải phương trình $|x-6|^2+|x-7|^3=1$ (1).

*Lời giải có sai lầm của HS*:

Ta có: $|x-6|^2+|x-7|^3=1 \Leftrightarrow \left(x^2-12x+36\right)+\left(x-7\right)^3=1\ \left(2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2-12x+35\right)+\left(x-7\right)^3=0 \Leftrightarrow \left[\left(x^2-7x\right)+\left(-5x+35\right)\right]+\left(x-7\right)^3=0$

$\Leftrightarrow x\left(x-7\right)-5\left(x-7\right)+\left(x-7\right)^3=0 \Leftrightarrow \left(x-7\right)\left[x-5+\left(x-7\right)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(x-7\right)\left(x^2-13x+44\right)=0 \Leftrightarrow x=7.$

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x=7$.

*Phân tích sai lầm:* HS chưa nắm được lí thuyết về giá trị tuyệt đối: $|A|=\begin{cases} A, & A\ge 0 \\ -A, & A<0 \end{cases}$. Điều đó dẫn đến phương trình $\left(2\right)$ không tương đương với phương trình (1) ban đầu và làm mất nghiệm.

*Hướng khắc phục:* Thông thường, đối với các dạng toán có lồng trị tuyệt đối, phương pháp chia nhỏ khoảng (miền) giá trị là rất cần thiết và có thể đơn giản hóa bài toán một cách nhanh chóng và dễ hiểu nhất. Lí thuyết cũng như các phương pháp để phá giá trị tuyệt đối là một kĩ thuật cơ bản của HS khi giải các bài toán về phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối. GV cần hướng dẫn HS biết cô lập miền giá trị hoặc chia khoảng, đoạn nếu cần. Trong trường hợp có nhiều khoảng, đoạn, GV có thể hướng dẫn HS dùng "tia giá trị" hoặc "bảng xét dấu mở rộng" để chia nhỏ miền đang xét.

*Cách giải đúng*:

Xét các trường hợp:

- Trường hợp 1: Với $x=6$ phương trình (1) nghiệm đúng.
- Trường hợp 2: Với $x=7$ phương trình (1) nghiệm đúng.
- Trường hợp 3: Với $x>7 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6>1 \\ x-7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-6|^2>1 \\ |x-7|^3>0 \end{cases}$. Khi đó: $|x-6|^2+|x-7|^3>1$ nên phương trình (1) vô nghiệm.
- Trường hợp 4: Với $x<6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6<0 \\ x-7<-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-6|^2>0 \\ |x-7|^3>1 \end{cases} \Rightarrow |x-6|^2+|x-7|^3>1$, hay phương trình (1) vô nghiệm.

- Trường hợp 5: Với $6 < x < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-6 < 1 \\ -1 < x-7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-6|^2 < |x-6| \\ |x-7|^3 < |x-7| \end{cases}$.

Khi đó, ta có: $|x-6| + |x-7| = x-6+7-x = 1$. Hay vế trái của phương (1) nhỏ hơn vế phải. Do vậy, phương trình vô nghiệm.

Vậy, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x = 6,\ x = 7$.

*2.2.2. Sai lầm trong các phép biến đổi chứa dấu căn thức*

*Ví dụ 2:* Giải phương trình $x + 1 = \sqrt{x^2 - 2x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (1).

*Lời giải có sai lầm của HS*:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x^2 - 3x + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$.

Nhân cả hai vế của phương trình với $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, ta được:

$$(x+1)\left(\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-3x+2}\right) = \left(\sqrt{x^2-2x+3} + \sqrt{x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-3x+2}\right) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-3x+2}\right) = \left(\sqrt{x^2-2x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-3x+2}\right) = x+1 \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-3x+2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 0 \\ \sqrt{x^2-2x+3} = \sqrt{x^2-3x+2} + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2\sqrt{x^2-3x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \begin{cases} x^2 = 4x^2 - 12x + 8 \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ \begin{cases} 3x^2 - 12x + 8 = 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right..$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-1; \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

*Phân tích sai lầm:* HS đã sử dụng phép biến đổi tương đương khi nhân hai vế của phương trình với một biểu thức chưa biết là có khác không hay không, dẫn đến thu được một phương trình mới không tương đương với phương trình ban đầu. Thông thường, ta rất ít khi nhân hai vế của một phương trình với biểu thức có dạng ($\sqrt{A} - \sqrt{B}$), chỉ áp dụng khi biết chắc rằng A = B là không xảy ra. Thay vào đó, ta thường dùng sử dụng biểu thức ($\sqrt{A} + \sqrt{B}$) (với A, B không đồng thời bằng $0$) để nhân vào hai vế của phương trình.

GV cần lưu ý cho HS: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ h(x) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x).h(x) = g(x).h(x)$.

*Hướng khắc phục:* Những dạng toán có dạng $\sqrt{A} - \sqrt{B},\ \sqrt{A} + \sqrt{B},\ \dfrac{1}{\sqrt{A} - \sqrt{B}},\ \dfrac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$, GV thường hướng dẫn HS phương pháp "nhân lượng liên hợp". Tuy nhiên, câu hỏi đặt ra: Liệu có phải lúc nào cũng có thể nhân liên hợp hay không? GV cần giúp HS phân biệt được dạng toán nào nên sử dụng phương pháp nhân liên hợp. Đặc biệt, GV cần đưa ra cho HS các phương pháp áp dụng cho từng dạng toán để HS tránh được những sai lầm thường gặp.

*Lời giải đúng*: Điều kiện: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2-3x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$.

Ta có: $x+1=\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}=1$

(Do $\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}\ge \sqrt{\left(x^2-2x+1\right)+2}=\sqrt{\left(x-1\right)^2+2}\ge \sqrt{2}>0$).

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x+2}\right)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2-3x+2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-3x+2}=1$$

$$\Leftrightarrow x=2\sqrt{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4x^2-12x+8 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-12x+8=0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3};\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

*2.2.3. Sai lầm khi giải và biện luận bất phương trình chứa tham số*

*Ví dụ 3*: Tìm m để biểu thức $\sqrt{\left(m^2-3m+2\right)x^2-3\left(m-1\right)x+2}$ có nghĩa với mọi x.

*Lời giải có sai lầm của HS:* Biểu thức có nghĩa khi và chỉ khi:

$f\left(x\right)=\left(m^2-3m+2\right)x^2-3\left(m-1\right)x+2\ge 0$.

Hay:

$$\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ 9m^2-18m+9-8m^2+24m-16\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m^2+6m-7\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ -7\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7\le m<1.$$

Vậy, giá trị m cần tìm là: $-7\le m<1$.

*Phân tích sai lầm:* Sai lầm của HS trong bài toán này chính là các em chưa xét cho trường hợp hệ số a = 0 của một bất phương trình có dạng: $ax^2+bx+c\ge 0$. Dẫn đến kết quả của bài toán là thiếu nghiệm.

*Hướng khắc phục:* GV nhắc lại cho HS kiến thức lí thuyết về giải bất phương trình bậc 2 trong chương trình Đại số 10 để các em nắm vững lí thuyết và biết vận dụng vào bài toán biện luận bất phương trình chứa tham số.

*Lời giải đúng:* Biểu thức có nghĩa khi và chỉ khi: $f\left(x\right)=\left(m^2-3m+2\right)x^2-3\left(m-1\right)x+2\ge 0$.

$$\text{Hay: } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ 9m^2-18m+9-8m^2+24m-16\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2-3m+2=0 \\ -3\left(m-1\right)=0 \\ 2\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ m^2+6m-7\le 0 \end{cases} \\ m=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right. \\ -7\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7\le m<1 \\ m=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow -7\le m\le 1.$$

Vậy, giá trị m cần tìm là $-7\le m\le 1$.

Từ những sai lầm thường gặp của HS ở trên, có thể thấy việc nhận ra và khắc phục được sai lầm sẽ giúp các em hiểu sâu và nhớ lâu kiến thức. Tuy nhiên, để tăng cường cho HS khả năng tự phát hiện cũng như sửa chữa được sai lầm của mình, theo chúng tôi, GV cần: - Rèn luyện cho HS khả năng giải toán, luyện tập các hoạt động và hoạt động thành phần mà các em thường mắc phải sai lầm khi giải toán; - Thiết kế một số tình huống dạy học dễ dẫn đến sai lầm, từ đó giúp các em nâng cao khả năng tự phát hiện và khắc phục sai lầm của mình; - Tạo điều kiện tốt nhất cho HS trong quá trình học tập để các em có thể bộc lộ những khó khăn, cũng như sai lầm thường gặp.

**3. Kết luận**

Trong dạy học Toán, sai lầm của HS là không tránh khỏi. Kết quả nghiên cứu của bài báo đã đưa ra một số sai lầm thường gặp của HS trong dạy học chủ đề "Phương trình - Bất phương trình" (Đại số 10), từ đó phân tích nguyên nhân dẫn đến sai lầm cũng như hướng khắc phục sai lầm đó. Sai lầm và nguyên nhân dẫn đến sai lầm của HS là rất đa dạng và phong phú. Có rất nhiều sai lầm khác nhau của HS, do vậy GV cần tìm rõ nguyên nhân dẫn đến sai lầm của các em để đưa ra hướng khắc phục. Bởi khi GV nắm được nguyên nhân dẫn đến sai lầm của HS mới có thể đưa ra biện pháp, cũng như phương pháp dạy học hiệu quả trong việc giúp các em sửa chữa sai lầm. Bên cạnh đó, việc làm rõ nguồn gốc những sai lầm của HS sẽ giúp các em khắc sâu và ghi nhớ kiến thức, từ đó nắm vững được cách khắc phục.

**Tài liệu tham khảo**


Bessot, A., Comiti, C., Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến (2009). *Những yếu tố cơ bản của didactic Toán.* NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

Đinh Hải Tâm, Nguyễn Văn Thà (2018). Phân tích và sửa chữa những sai lầm thường gặp của học sinh khi giải bài tập chương "Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số" (Giải tích 12). *Tạp chí Giáo dục, 427*, 23-26.

Dương Hữu Tòng (2017). Dự đoán và giải thích nguyên nhân sai lầm của học sinh khi học chủ đề phân số dưới ngôn ngữ của didactic toán. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, 37*, 130-139.

Hoàng Phê (chủ biên, 2008). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng.

Hoàng Thị Ngọc Ánh, Đỗ Thị Trinh (2019). Khắc phục sai lầm trong giải toán xác suất cho học sinh lớp 11 trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục, 446*, 34-37.

Hodes, E., Nolting, P. (1998). *Winning at Mathematics?*. SBCC Mathematics Department, Academic Succes Press.

Lê Bình Dương, Nguyễn Thị Hậu (2019). Một số sai lầm thường gặp của sinh viên trong dạy học Xác suất thống kê ở các trường đại học. *Tạp chí Giáo dục, 468*, 38-42; 32.

Nguyễn Thị Quyên (2017). Một số sai lầm thường gặp của học sinh lớp 9 khi giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn. *Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt tháng 7*, 197-200.

Polya, G. (1997). *Giải bài toán như thế nào?*. NXB Giáo dục.

Stoliar, A. A. (1969). *Giáo dục học toán học*. NXB Giáo dục Minsk.