

BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN (TOÁN 9)

Phạm Huyền Trang¹,
Nguyễn Ái Quốc²,
Nguyễn Ngọc Giang^{3,+},
Nguyễn Thị Thanh Thúy⁴

¹Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

²Trường Đại học Sài Gòn;

³Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh;

⁴Trường Trung học cơ sở, Trung học phổ thông Hoa Sen, thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh

+ Tác giả liên hệ • Email: giangnn@hub.edu.vn

Article history

Received: 19/01/2025

Accepted: 03/3/2025

Published: 05/7/2025

Keywords

Mathematical thinking and reasoning ability, real-world problems, first-degree equations and systems of two-variable equations, procedure, grade 9th

ABSTRACT

In the context of the current educational reforms, fostering mathematical competence, particularly mathematical reasoning and thinking skills, has become a pressing requirement. Students need to develop cognitive processes, learn how to reason, and provide evidence to support their viewpoints. This study employs a theoretical research approach, clarifying the concept and components of mathematical reasoning and thinking competence while proposing a framework and illustrative examples for teaching the topic of first-degree equations and systems of two-variable equations in grade 9. The research findings contribute to the development of a competency-based teaching methodology, especially in solving real-world problems related to shared and individual work. Additionally, the study provides theoretical and practical insights into enhancing students' mathematical competence and qualities.

1. Mở đầu

Năng lực tư duy và lập luận toán học (TD&LLTH) là năng lực toán học thành phần đang được quan tâm đặc biệt trong bối cảnh dạy học theo định hướng phát triển phẩm chất và năng lực người học. Nhiều nghiên cứu cũng chỉ ra rằng người học có năng lực TD&LLTH càng cao thì thành tích học tập càng tốt (Kodirun et al., 2023). Năng lực này đã được nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước quan tâm, nghiên cứu và phân tích dưới nhiều góc độ khác nhau, chẳng hạn như các nghiên cứu của Sumlay và cộng sự (2022), Mohammad Albaqawi (2023), Marasabessy (2021), Nguyễn Hữu Hậu và cộng sự (2024), Nguyễn Văn Thuận và cộng sự (2023), Nguyễn Dương Hoàng và Phạm Thị Kim Ngân (2023), Lê Thị Cẩm Nhung (2020), Nguyễn Dương Hoàng và Trần Xuân Nam (2024),... Như vậy, năng lực TD&LLTH đã và đang là năng lực tư duy toán học được áp dụng và nghiên cứu một cách mạnh mẽ trong các hoạt động dạy và học khi đổi mới chương trình và sách giáo khoa như hiện nay.

Chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” không những giúp HS giải quyết được một số vấn đề thực tiễn như cân bằng phản ứng hóa học mà còn trong các bài toán thực tế khác (Trần Nam Dũng và cộng sự, 2024). Đây là nội dung tiềm ẩn nhiều thao tác tư duy quan trọng, góp phần bồi dưỡng năng lực TD&LLTH. Tuy nhiên, HS thường gặp khó khăn trong thiết lập công thức và tư duy suy luận để giải toán. Quá trình giải quyết bài toán đòi hỏi HS phải xác định rõ yêu cầu cần tìm từ dữ kiện cho trước, sau đó thiết lập mô hình toán học phù hợp dưới dạng phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Cuối cùng là HS giải bài toán và rút ra kết luận. Với cách tiếp cận này, bài báo cung cấp một tài liệu hữu ích góp phần hỗ trợ dạy học theo định hướng phát triển phẩm chất và năng lực người học.

Các bài toán thực tế về phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là nội dung quen thuộc trong tất cả các sách giáo khoa. Tuy nhiên, việc nghiên cứu và bồi dưỡng năng lực TD&LLTH trong dạy học các bài toán thực tế thuộc chủ đề này ở lớp 9 vẫn còn là một khoảng trống khoa học chưa có nhiều công trình nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lí luận để phân tích, tổng hợp từ các công trình nghiên cứu để làm rõ một số khái niệm về năng lực TD&LLTH và đưa ra quy trình dạy học bồi dưỡng năng lực này trong giảng dạy chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9).

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm

2.1.1. Tư duy và lập luận toán học

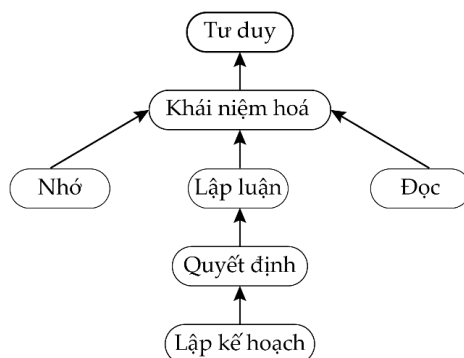
- “Tư duy” là quá trình nhận thức, phân tích, suy luận và xử lý thông tin nhằm rút ra kết luận, giải pháp hoặc ý tưởng. Quá trình này giúp con người hiểu, giải thích thế giới xung quanh, giải quyết vấn đề, đưa ra quyết định và phát triển tri thức. Theo Từ điển tiếng Việt, tư duy là giai đoạn cao của quá trình nhận thức, đi sâu vào bản chất và khám phá quy luật của sự vật thông qua các hình thức như biểu tượng, khái niệm, phán đoán và suy lý (Hoàng Phê và cộng sự, 2023). Rosenthal (1986) cũng khẳng định rằng tư duy là sản phẩm cao nhất của vật chất được tổ chức đặc biệt - bộ não, phản ánh thế giới khách quan thông qua quá trình suy luận và nhận thức tích cực. Holyoak và cộng sự (2019) bổ sung rằng tư duy là quá trình chuyển hóa có hệ thống các biểu tượng tâm lý của tri thức để mô tả các trạng thái thực tế có thể xảy ra trong thế giới vật chất, phục vụ những mục tiêu nhất định. Hoạt động tư duy tồn tại dưới nhiều hình thức khác nhau, bao gồm tư duy phản biện (phân tích và đánh giá thông tin), tư duy sáng tạo (tạo ra ý tưởng mới) và tư duy logic (vận dụng nguyên tắc logic để đưa ra kết luận). Không chỉ giới hạn ở lý thuyết, tư duy còn gắn liền với thực tiễn, giúp con người áp dụng tri thức vào đời sống và giải quyết các vấn đề thực tế một cách hiệu quả.

- “Tư duy toán học” được hiểu là: (1) Hình thức biểu lộ của tư duy biện chứng trong quá trình con người nhận thức khoa học toán học hay trong quá trình áp dụng toán học vào các ngành khoa học khác; (2) Tư duy toán học có các tính chất đặc thù được quy định bởi bản chất của khoa học toán học, bởi sự áp dụng các phương pháp toán học để nhận thức các hiện tượng của thế giới hiện thực, cũng như bởi chính các phương thức chung của tư duy sử dụng (Phạm Văn Hoàn và cộng sự, 1981). Lê Hồng Thẩm (2019) nhấn mạnh rằng tư duy toán học không chỉ là yếu tố cốt lõi trong hoạt động toán học của HS mà còn là điều kiện cần thiết để đảm bảo hiệu quả trong quá trình tiếp thu kiến thức và rèn luyện kỹ năng toán học. Nếu không được định hướng và phát triển một cách có hệ thống, HS khó có thể đạt được sự hiểu biết sâu sắc và khả năng vận dụng toán học vào thực tế. Như vậy, tư duy toán học là một hình thức tư duy đặc thù, sử dụng các kiến thức và kỹ năng toán học để khám phá bản chất và phát hiện quy luật toán học thông qua các quá trình phán đoán và suy luận. Đối tượng của tư duy toán học bao gồm các hình ảnh, biểu tượng và kí hiệu toán học, đóng vai trò quan trọng trong việc mô hình hóa và giải quyết các vấn đề toán học.

- “Lập luận” được định nghĩa theo nhiều góc độ khác nhau. Theo Từ điển tiếng Việt, đó là quá trình trình bày lí lẽ một cách có hệ thống và logic nhằm chứng minh một kết luận về một vấn đề (Hoàng Phê và cộng sự, 2023). Đại từ điển tiếng Việt cũng nhấn mạnh rằng lập luận bao gồm việc trình bày có lí lẽ và hệ thống để chứng minh cho một kết luận nhất định (Nguyễn Như Ý và cộng sự, 2011). Trong khi đó, Từ điển Oxford định nghĩa lập luận là quá trình suy nghĩ về sự vật, hiện tượng một cách logic, đồng thời là tập hợp các ý kiến và ý tưởng dựa trên tư duy hợp lí (Hornby, 2005). Từ các định nghĩa trên, có thể hiểu rằng lập luận là quá trình xây dựng một chuỗi lí lẽ và chứng cứ nhằm bảo vệ một quan điểm, ý tưởng hoặc quyết định. Mục tiêu của lập luận là thuyết phục người khác hoặc giải thích một vấn đề theo cách có hệ thống, chặt chẽ và hợp lí.

- “Lập luận toán học” là khả năng mỗi cá nhân dựa vào những giả thiết cho trước của bài toán, sử dụng các ngôn ngữ toán học để đưa ra các kết luận đúng. Đó chính là kết quả của quá trình tư duy, bằng một chuỗi lập luận để giải quyết vấn đề (Hoàng Thị Ngọc, 2021). Như vậy, lập luận toán học là trình bày lí lẽ toán học một cách có hệ thống, có logic nhằm chứng minh cho một kết luận về một vấn đề toán học.

- Mối quan hệ giữa TD&LLTH được thể hiện qua sơ đồ sau:



Hình 1. Mối quan hệ giữa TD&LLTH (Nguồn: Holyoak et al., 2019)

2.1.2. Năng lực tư duy và lập luận toán học

- Quan niệm về năng lực TD&LLTH ở nước ta và nhiều nước trên thế giới có sự khác biệt. Ở Đan Mạch, năng lực TD&LLTH được tách thành hai dạng năng lực là năng lực tư duy và năng lực lập luận toán học. Năng lực tư duy toán học được thể hiện ở chỗ: (1) Biết đặt ra các câu hỏi toán học, biết trả lời các câu hỏi toán học này; (2) Thông hiểu, biết cách xử lý về ngữ cảnh và hạn chế của khái niệm toán học đã cho; (3) Mở rộng khái niệm bằng cách trừu tượng hóa một số thuộc tính của nó; (3) Tổng hợp kết quả cho lớp đối tượng lớn hơn; (5) Phân biệt giữa các loại câu lệnh toán học khác nhau (bao gồm khẳng định có điều kiện, phát biểu đầy đủ định lượng, giả định, định nghĩa, định lý, phỏng đoán, trường hợp). Năng lực lập luận toán học được thể hiện qua các khía cạnh: (1) Đánh giá các chuỗi lập luận do những người khác đưa ra; (2) Hiểu bản chất của chứng minh toán học và phân biệt với các loại chứng minh khác; (3) Xác định mức độ chi tiết cần thiết trong lập luận mà không cần chứng minh mọi ý tưởng cơ bản; (4) Phân biệt lập luận theo quy cách và lập luận không theo quy cách; (5) Biến đổi lập luận khám phá thành các chứng minh toán học. Trên cơ sở đó, năng lực tư duy toán học nhấn mạnh vào việc đặt câu hỏi, tìm hiểu và phân tích vấn đề thông qua thao tác tư duy như so sánh, phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự, tìm nhiều cách giải, cũng như phát hiện và sửa chữa sai lầm (Niss, 2003). Chúng tôi đồng ý với quan điểm của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 khi cho rằng năng lực TD&LLTH được thể hiện qua các thao tác tư duy như: (1) So sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa, tương tự, quy nạp, diễn dịch; (2) Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận; (3) Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học (Bộ GD-ĐT, 2018).

Dựa vào Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, chúng tôi đưa ra các biểu hiện của mỗi thành tố năng lực TD&LLTH qua chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9) như sau:

Nội dung	Thành tố năng lực TD&LLTH có thể bồi dưỡng
Giải được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	So sánh, phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, tương tự
	Biết sử dụng chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí để giải thích kết quả
	Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học
Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	So sánh, phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, tương tự
	Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận
	Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học

2.2. Quy trình dạy học bồi dưỡng năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học các bài toán thực tế về chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (lớp 9)

Xuất phát từ yêu cầu cần đạt của nội dung “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9): (1) Giải được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn; (2) Tính được nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng máy tính cầm tay; (3) Giải quyết được một số vấn đề thực tiễn gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn (ví dụ: các bài toán liên quan đến cân bằng phương trình trong môn Hóa học, hay các bài toán tối ưu trong thực tế,...). Bên cạnh đó, theo định hướng phát triển phẩm chất và năng lực của HS trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018, đặc biệt là năng lực TD&LLTH (Trần Nam Dũng và cộng sự, 2024), việc giảng dạy chủ đề này cần được thiết kế theo hướng khuyến khích HS phát triển khả năng tư duy logic, lập luận chặt chẽ và vận dụng toán học vào thực tiễn.

Từ những cơ sở trên, chúng tôi đề xuất quy trình dạy học nhằm bồi dưỡng năng lực TD&LLTH thông qua các bài toán thực tế thuộc chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9), bao gồm các bước sau:

- **Bước 1. Tìm hiểu và phân tích bài toán thực tế:** Dựa vào yêu cầu cần đạt về phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, GV đưa ra bài toán thực tế, yêu cầu HS xác định các dữ kiện và câu hỏi của bài toán đã phù hợp với thực tế hay chưa? Xác định các đối tượng chưa biết, các đối tượng đã biết cũng như phân tích mối quan hệ giữa các đối tượng.

- **Bước 2. Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí:** GV yêu cầu HS lập luận, đưa ra các minh chứng cho lời giải bài toán. Lập luận của HS thể hiện được tính logic, hợp lí cũng như dễ hiểu. HS tìm phương án giải quyết bài toán thông qua các lập luận đã đưa ra.

- **Bước 3. Rút ra kết luận:** Từ dữ kiện bài toán cũng như từ các lập luận mang tính logic, HS rút ra kết luận đối với bài toán. Kết luận phải phù hợp với bối cảnh thực tế.

- **Bước 4. Nghiên cứu sâu bài toán:** Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề.

2.3. Ví dụ minh họa dạy học bồi dưỡng năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học các bài toán thực tế về chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9)

Ví dụ: Nhân dịp Tết Nguyên Đán, Trường THCS A tổ chức hoạt động trải nghiệm cho HS gói bánh chưng và chia đều số bánh chưng làm được thành các phần quà để tặng cho các bạn HS có hoàn cảnh khó khăn đón tết. Nếu mỗi phần quà tặng 2 bánh thì giảm 13 phần quà, còn nếu mỗi phần quà giảm 1 bánh thì các bạn sẽ có thêm 13 phần quà nữa. Hỏi ban đầu có bao nhiêu phần quà và mỗi phần quà có bao nhiêu chiếc bánh chưng?



Hình 2. Tết Nguyên Đán (Nguồn: Tác giả)

- Bước 1. Tìm hiểu và phân tích bài toán thực tế:

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
GV: Mỗi phần quà tặng 2 bánh thì giảm bao nhiêu phần quà?	HS: 13 phần quà.
GV: Mỗi phần quà giảm 1 bánh thì có thêm bao nhiêu phần quà?	HS: 13 phần quà.
Mục tiêu: Bồi dưỡng thao tác tư duy phân tích là một thành tố của năng lực TD&LLTH	

- Bước 2. Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và lập luận hợp lí:

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
GV: Gọi số phần quà ban đầu là x (phần). Điều kiện của x ?	HS: $x > 13$ và $x \in N^*$
GV: Gọi số bánh chưng có trong mỗi phần quà ban đầu là y (bánh). Điều kiện của y ?	HS: $y > 1$ và $y \in N^*$
GV: Khi đó số bánh chưng tặng cho HS có hoàn cảnh khó khăn?	HS: xy (bánh chưng).
GV: Nếu mỗi phần quà tặng 2 bánh thì giảm 13 phần quà thì ta có phương trình gì?	HS: $xy = (x - 13)(y + 2)$ suy ra $2x - 13y = 26$. (1)
GV: Nếu mỗi phần quà giảm 1 bánh thì có thêm 13 phần quà thì ta có phương trình gì?	HS: $xy = (x + 13)(y - 1)$ suy ra $-x + 13y = 13$. (2)
GV: Từ các phương trình (1) và (2) ta có hệ phương trình gì?	HS: $\begin{cases} 2x - 13y = 26 \\ -x + 13y = 13 \end{cases}$
Mục tiêu: Thể hiện được thành tố chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí của năng lực TD&LLTH.	

- Bước 3. Rút ra kết luận:

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
GV: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 13y = 26 \\ -x + 13y = 13 \end{cases}$	HS: Làm theo yêu cầu của GV.
Rút ra kết luận bài toán.	
GV: Hãy hoàn thiện lời giải?	HS: Trình bày lời giải
Lời giải của HS: Gọi số phần quà ban đầu là x (phần) với $x > 13$ và $x \in N^*$ Gọi số bánh chưng có trong mỗi phần quà ban đầu là y (bánh) với $y > 1$ và $y \in N^*$ Khi đó số bánh chưng tặng cho HS có hoàn cảnh khó khăn là xy (bánh chưng). Nếu mỗi phần quà tặng 2 bánh thì giảm 13 phần quà nên ta có phương trình:	

$$xy = (x - 13)(y + 2) \text{ suy ra } 2x - 13y = 26. (1)$$

Nếu mỗi phần quà giảm 1 bánh thì có thêm 13 phần quà nên ta có phương trình:

$$xy = (x + 13)(y - 1) \text{ suy ra } -x + 13y = 13. (2)$$

Từ các phương trình (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - 13y = 26 \\ -x + 13y = 13 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hai phương trình của hệ ta được: $x = 39$, suy ra $y = 4$ (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy ban đầu có 39 phần quà và mỗi phần quà có 4 bánh chung.

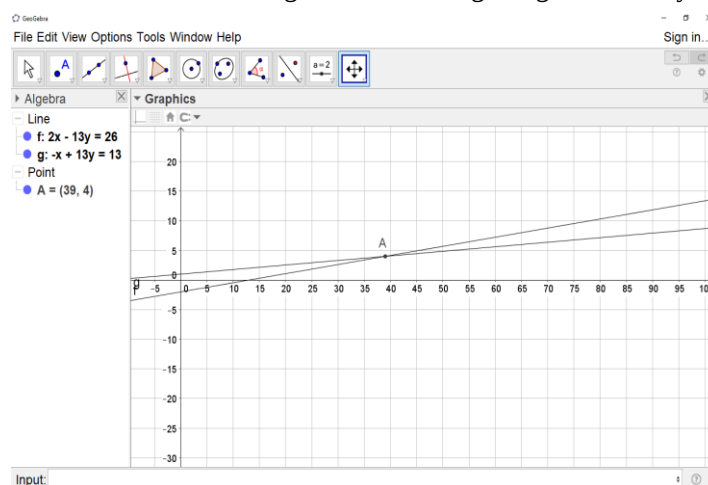
Mục tiêu: Thể hiện được thành tố chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí của năng lực TD&LLTH.

- **Bước 4. Nghiên cứu sâu bài toán:**

GV: Em hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị sử dụng phần mềm GeoGebra?

HS: Vào ô **Input** nhập phương trình $2x - 13y = 26$ và $-x + 13y = 13$.

Vào biểu tượng  **Intersect** xác định giao của hai đường thẳng là A. Ta thấy $A = (39, 4)$.



Hình 3. Lời giải trên phần mềm GeoGebra (Nguồn: Tác giả)

Vậy ban đầu có 39 phần quà và mỗi phần quà có 4 bánh chung.

HS: Như vậy, ngoài cách giải thông thường bằng phương pháp đại số thì ta còn có thể giải bài toán bằng phương pháp tọa độ. Mỗi cách giải có ưu điểm riêng và đều được sử dụng trong giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

GV: Nhận xét về giải thích của HS là đúng và chính xác.

Mục tiêu: Thể hiện được thành tố giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học.

Kết quả bước đầu cho thấy, việc áp dụng phương pháp dạy học chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9) theo hướng bồi dưỡng năng lực TD&LLTH đã mang lại hiệu quả tích cực. HS tỏ ra hào hứng, chủ động tham gia vào quá trình học tập, tích cực phát biểu và thảo luận. Đặc biệt, thông qua các tình huống học tập đã được thiết kế, HS không chỉ nắm vững bản chất của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mà còn rèn luyện được các thao tác tư duy quan trọng. HS biết cách phân tích, chỉ ra chứng cứ và lập luận hợp lí trước khi đưa ra kết luận. Đồng thời, các em cũng có khả năng giải thích, điều chỉnh cách giải quyết vấn đề một cách linh hoạt khi cần thiết.

3. Kết luận

Phương pháp bồi dưỡng năng lực TD&LLTH trong dạy học các bài toán thực tế thuộc chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9) không chỉ góp phần giúp HS nắm vững kiến thức mà còn phát triển các phẩm chất và năng lực cần thiết. Phương pháp này giúp rèn luyện các thao tác tư duy quan trọng như phân tích, xác định chứng cứ, lập luận hợp lí, cũng như giải thích và điều chỉnh cách thức giải quyết vấn đề. Đây đều là những thành tố cốt lõi của năng lực TD&LLTH. Bài báo đã hệ thống hóa các quan điểm về tư duy, lập luận, tư duy toán học và lập luận toán học, đồng thời đề xuất quy trình dạy học kèm theo các ví dụ minh họa cụ thể nhằm bồi dưỡng

năng lực TD&LLTH cho HS. Kết quả nghiên cứu cho thấy cách tiếp cận này không chỉ nâng cao hứng thú học tập mà còn khuyến khích HS chủ động xây dựng lập luận và tham gia phát biểu ý kiến. Một trong những khuyến nghị quan trọng là phương pháp này có thể được mở rộng áp dụng cho nhiều nội dung khác trong chương trình Đại số, không chỉ giới hạn ở chủ đề “Phương trình và hệ phương trình bậc nhất hai ẩn” (Toán 9).

Tài liệu tham khảo

- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Hoàng Phê (chủ biên), Bùi Khắc Việt, Chu Bích Thu, Đào Thản, Hoàng Tuệ, Hoàng Văn Hành, Lê Kim chi, Nguyễn Minh Châu, Nguyễn Ngọc Trâm, Nguyễn Thanh Nga, Nguyễn Thủy Khanh, Nguyễn Văn Khang, Phạm Hùng Việt, Trần Cẩm Vân, Trần Nghĩa Phương, Vũ Ngọc Bảo, Vương Lộc (2023). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng - Trung tâm Từ điển học.
- Hoàng Thị Ngọc (2021). *Bồi dưỡng năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh qua các bài toán thực tế ở lớp 9*. Luận văn thạc sĩ Lý luận và Phương pháp dạy học môn Toán, Trường Đại học Sài Gòn.
- Holyoak, K. J., Morrison, R. G., Holyoak, K. J., & Morrison, R. G. (2019). Thinking and Reasoning : A Reader's Guide Abstract and Keywords What Is Thinking? *The Oxford Handbook of Thinking and Reasoning*, January 2005, 1-12.
- Hornby, A. S. (2005). *Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English*. Oxford University Press.
- Kodirun, K., Busnawir, B., Kadir, K., & Zamsir, Z. (2023). Mathematical reasoning skills, lectures' made-test and students' mathematical achievement: Understanding lectures' thoughts. *Sylwan*, January 2023. <https://doi.org/10.59879/qjd2y>
- Lê Hồng Thắm (2019). *Rèn luyện năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học chủ đề tam giác đồng dạng hình học 8*. Luận văn thạc sĩ Khoa học Giáo dục, Trường Đại học Đồng Tháp.
- Lê Thị Cẩm Nhung. (2020). Dạy học yếu tố hình học ở tiểu học theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, 37-42.
- Marasabessy, R. (2021). Study of Mathematical Reasoning Ability for Mathematics Learning in Schools: A Literature Review. *Indonesian Journal of Teaching in Science*, 1(2), 79-90. <https://doi.org/10.17509/ijotis.v1i2.37950>
- Mohammad Albaqawi, H. H. (2023). Mathematical Thinking Skills Level Among Intermediate School Students. *PalArch's Journal of Archaeology of Egypt*, 20(2), 31-44.
- Nguyễn Dương Hoàng, Phạm Thị Kim Ngân (2023). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 7 thông qua dạy học chủ đề các đại lượng tỉ lệ. *Tạp chí Thiết bị Giáo dục*, 2(297), 25-27.
- Nguyễn Dương Hoàng, Trần Xuân Nam (2024). Một số biện pháp bồi dưỡng năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 10 trong dạy học chủ đề “Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng”. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, 13(số đặc biệt 01), 303-310.
- Nguyễn Hữu Hậu, Lê Phương Chi, Nguyễn Thành Tâm (2024). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 8 khi dạy học chủ đề hình đồng dạng. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Hồng Đức*, 68, 56-65.
- Nguyễn Như Ý (chủ biên), Nguyễn Văn Khang, Vũ Quang Hào, Phan Xuân Thành (2011). *Đại từ điển Tiếng Việt*. NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.
- Nguyễn Văn Thuận, Nguyễn Thị Mỹ Hằng, Nguyễn Thị Xoan (2023). Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Đại số tổ hợp” ở trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, 23(7), 1-5.
- Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: the Danish Kom Project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 115-124.
- Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thù Trình (1981). *Giáo dục học môn Toán*. NXB Giáo dục.
- Rosenthal, M. M. (1986). *Từ điển Triết học*. NXB Tiến bộ.
- Sumlay, B. A., Pandaupan, D. A. A., Florague, A. P., & Escote, A. D. (2022). Mathematical Thinking Skills of BSED-Math Students : Its Relationship to Study Habits and Utilization of Schoology. *Psychology and Education: A Multidisciplinary Journal*, 6, 954-971. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7392524>
- Trần Nam Dũng (chủ biên), Trần Đức Huyền, Nguyễn Thành Anh, Nguyễn Văn Hiến, Ngô Hoàng Long, Nguyễn Đăng Trí Tín (2024). *Toán 9 (sách giáo viên, bộ Chân trời sáng tạo)*. NXB Giáo dục Việt Nam.