

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ “GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ” (TOÁN 12)

Nguyễn Ái Quốc^{1,+},
Nguyễn Nhật Huy²

¹Trường Đại học Sài Gòn;

²Trường Trung học phổ thông Võ Văn Kiệt, Thành phố Hồ Chí Minh

+ Tác giả liên hệ • Email: naquoc@sgu.edu.vn

Article history

Received: 05/02/2025

Accepted: 27/3/2025

Published: 05/8/2025

Keywords

Competency, mathematical modeling, maximum value, minimum value, Math 12

ABSTRACT

In teaching Mathematics in high schools, mathematical modeling competence is one of the five mathematical competencies that need to be formed and developed for students. Mathematical modeling competency allows students to convert a practical problem into a mathematical problem by building mathematical models, applying acquired knowledge to solve mathematical problems, and finally providing solutions to the original practical problem. The study proposes a mathematical modeling process in teaching Mathematics in high schools to develop mathematical modeling competency for students and illustrates this process through teaching experiments on the topic “The largest and smallest values of functions” (Mathematics 12). The experimental results show that, under the guidance of teachers, the students actively participated in completing learning tasks according to the mathematical modeling process and fully developed the components of mathematical modeling competency.

1. Mở đầu

Một trong những mục tiêu của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 là hình thành và phát triển cho HS năng lực thành phần của năng lực toán học, trong đó có năng lực mô hình hóa toán học (MHHTH) (Bộ GD-ĐT, 2018). Năng lực MHHTH cho phép HS giải quyết các vấn đề thực tiễn bằng cách chuyển đổi chúng thành các bài toán toán học và giải các bài toán từ kiến thức toán học đã biết. Do vậy, năng lực MHHTH có vai trò quan trọng đối với HS, giúp các em nhận thức được mối liên hệ giữa toán học và thực tiễn. Năng lực MHHTH đã được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu vào đầu thế kỉ XXI. Các nghiên cứu tập trung xây dựng cơ sở lý thuyết và ứng dụng vào thực tiễn, như nghiên cứu của Blomhøj và Jensen (2007), Blum & Leiss (2007), Blum (2015), Nguyễn Danh Nam (2015; 2016), Burkhardt (2018), Niss (2018), Lê Hồng Quang (2019),...

Giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số thuộc mạch kiến thức Số, Đại số và Một số yếu tố giải tích, được đưa vào chương trình môn Toán lớp 11, là kiến thức toán có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Các vấn đề tìm GTLN, GTNN đã xuất hiện trong chương trình môn Toán cấp THCS, nhưng thường gắn với các biến đổi sơ cấp của bất đẳng thức, hằng đẳng thức, bất đẳng thức trong hình học. Tuy nhiên, ở lớp 11, việc tìm GTLN, GTNN của một đại lượng được quy về tìm GTLN, GTNN của một hàm số bằng công cụ đạo hàm. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán và minh họa quy trình này thông qua dạy học chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” ở Trường THPT Võ Văn Kiệt, quận 8, TP. Hồ Chí Minh. Phương pháp nghiên cứu lý thuyết được chúng tôi sử dụng để phân tích các tài liệu khoa học, làm rõ khái niệm năng lực MHHTH, quy trình MHHTH. Phương pháp nghiên cứu thực tiễn được sử dụng để phân tích Chương trình giáo dục phổ thông 2018, các bộ sách giáo khoa Toán 12 nhằm làm rõ nội dung của chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” được đưa vào chương trình, bao gồm các dạng bài toán nào có nhiều cơ hội phát triển được năng lực MHHTH cho HS; phương pháp nghiên cứu thực nghiệm được sử dụng để thiết kế tình huống dạy học, phân tích định tính kết quả học tập của HS và sự phát triển biểu hiện năng lực MHHTH của HS trong quá trình thực nghiệm.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Năng lực mô hình hóa toán học

Theo Blomhøj và Jensen (2003), năng lực MHHTH là khả năng tự chủ và thực hiện được quy trình MHHTH trong một bối cảnh nhất định, bao gồm: (1) Xây dựng nhiệm vụ; (2) Hệ thống hóa; (3) Toán học hóa; (4) Phân tích toán học; (5) Giải thích và đánh giá kết quả; (6) Đánh giá tính hợp lệ của mô hình. Henning và Keune (2007) định

nghĩa năng lực MHHTH là những khả năng, kĩ năng, thái độ đối với quá trình MHHTH và sự sẵn sàng của người học trong việc triển khai chúng. Theo Nguyễn Danh Nam (2016), năng lực MHHTH là khả năng thực hiện tất cả các phần của quy trình MHHTH trong một tình huống thực tiễn được đưa ra. Từ các quan điểm trên, theo chúng tôi có thể hiểu năng lực MHHTH là năng lực chuyển đổi một vấn đề thực tiễn thành một bài toán trong nội bộ môn Toán bằng cách xây dựng các mô hình toán học, sau đó giải bài toán và xem xét tính phù hợp của kết quả đối với bối cảnh thực tiễn và đưa ra giải pháp cho vấn đề thực tiễn ban đầu.

Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018, năng lực MHHTH của HS THPT gồm 03 biểu hiện và các yêu cầu cần đạt tương ứng như sau: (1) Thiết lập được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, sơ đồ, hình vẽ, bảng biểu, đồ thị,...) để mô tả tình huống đặt ra trong một số bài toán thực tiễn; (2) Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập; (3) Lí giải được tính đúng đắn của lời giải (những kết luận thu được từ các tính toán là có ý nghĩa, phù hợp với thực tiễn hay không). Đặc biệt, nhận biết được cách đơn giản hóa, điều chỉnh yêu cầu thực tiễn (xấp xỉ, bổ sung thêm giả thiết, tổng quát hóa,...) để đưa đến những bài toán giải được (Bộ GD-ĐT, 2018).

2.2. Đề xuất quy trình mô hình hóa toán học trong dạy học môn Toán ở trung học phổ thông nhằm phát triển năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh

Dựa trên quy trình MHHTH có tính tổng quát của Swetz và Hartzler (1991) gồm 4 giai đoạn, chúng tôi đề xuất quy trình MHHTH trong dạy học môn Toán gồm các bước sau:

Bước 1. Tìm hiểu vấn đề thực tiễn. Đọc hiểu yêu cầu của vấn đề thực tiễn; xác định các dữ kiện quan trọng của vấn đề, loại bỏ dữ kiện không cần thiết. GV có thể đưa ra câu hỏi hướng dẫn HS chọn lọc ra các yếu tố/dữ kiện cần thiết để giải quyết vấn đề. Bước 1 có nhiều cơ hội phát triển biểu hiện 1 của năng lực MHHTH cho HS.

Bước 2. Xây dựng mô hình toán học. Từ các yếu tố, dữ kiện cần thiết để giải quyết vấn đề đã xác định ở bước 1, GV hướng dẫn cho HS xây dựng mô hình toán học cho vấn đề thực tiễn và biểu thị mối liên hệ giữa các yếu tố/dữ kiện của bài toán toán học trên mô hình toán học. Cụ thể, từ các dữ kiện đã chọn lọc, HS xác định biến độc lập, biến phụ thuộc, xác định rõ vấn đề thực tiễn ban đầu quy về bài toán toán học nào? Bước 2 có nhiều cơ hội phát triển được biểu hiện 1 của năng lực MHHTH cho HS.

Bước 3. Giải bài toán toán học từ mô hình toán học đã thiết lập ở bước 2. Sử dụng các kiến thức, quy tắc, công thức toán học đã được học để giải bài toán toán học trên mô hình toán học đã thiết lập ở bước 2. Bước 3 có nhiều cơ hội phát triển biểu hiện 2 của năng lực MHHTH cho HS.

Bước 4. Đối chiếu, kiểm nghiệm kết quả trong thực tiễn. Xem xét sự thỏa mãn của kết quả thu được đối với các điều kiện ràng buộc của bài toán toán học; tính hợp lí của nghiệm đối với bài toán thực tiễn ban đầu và trả lời cho vấn đề được đặt ra. Bước này có nhiều cơ hội phát triển biểu hiện 3 của năng lực MHHTH cho HS.

2.3. Dạy học chủ đề “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số” (Toán 12) cho học sinh ở Trường Trung học phổ thông Võ Văn Kiệt, Thành phố Hồ Chí Minh

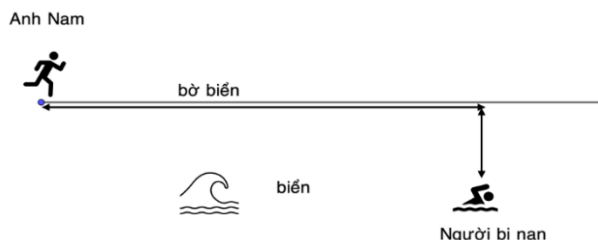
Trong phần này, chúng tôi sẽ minh họa quy trình MHHTH vào dạy học thực nghiệm chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” ở lớp 12A8, Trường THPT Võ Văn Kiệt, TP. Hồ Chí Minh vào tháng 10/2024. Lớp có 44 HS, được chia thành 11 nhóm, mỗi nhóm có 4 HS. Thời gian thực nghiệm dạy học là 90 phút. Chúng tôi thiết kế tiến trình dạy học chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” bao gồm 3 hoạt động: Trải nghiệm và khám phá; Hình thành kiến thức; Luyện tập và vận dụng. Quy trình MHHTH sẽ được thực hiện trong hoạt động 1 và 3 khi HS tham gia giải các bài toán.

Hoạt động 1. Trải nghiệm và khám phá. GV đưa ra vấn đề thực tiễn và yêu cầu HS giải quyết để tìm GTLN, GTNN của một yếu tố hay một đại lượng nào đó. Thông qua giải quyết vấn đề thực tiễn, HS trải nghiệm và tự khám phá khái niệm GTLN, GTNN của hàm số. Từ đó, giúp HS xây dựng cách tìm GTLN, GTNN của một hàm số.

Diễn biến hoạt động 1:

Bước 1. Tìm hiểu vấn đề thực tiễn. GV phát phiếu học tập số 1 có chứa bài toán 1 cho HS, yêu cầu các em đọc hiểu bài toán 1:

Bài toán 1: Anh Nam là nhân viên cứu hộ đang trực ở khu vực bãi biển dài 200m của Cam Ranh thì nhìn thấy một người đang bơi gặp nạn ở phía cuối bãi biển cách anh Nam 60m và vị trí người bơi cách bờ biển một khoảng cách 40m (xem hình 1). Anh Nam là người bơi giỏi, cao 1m9, có thể chạy với tốc độ 6m/s và bơi với



Hình 1. Mô tả tình huống trong bài toán
(Nguồn: Tác giả)

tốc độ 1,5m/s. Hỏi anh Nam cần chạy bao xa dọc theo bờ biển trước khi lao xuống nước để bơi đến vị trí người gặp nạn, nhằm đảm bảo đến chỗ người đó nhanh nhất? Kết quả cần được trình bày với hai chữ số thập phân.

GV yêu cầu HS nghiên cứu theo nhóm và trả lời các câu hỏi sau: Yêu cầu của bài toán là gì? Các dữ kiện nào cần thiết để giải bài toán, dữ kiện nào là thừa và giải thích tại sao? Vẽ hình mô tả tình huống trong bài toán và xác định các số liệu cần thiết để giải bài toán.

Kết quả bài làm của HS: Đa số các nhóm đều trả lời được câu hỏi và vẽ được hình mô tả, mô hình phỏng tình huống thực tiễn của bài toán. Tuy nhiên, có 4 nhóm không xác định được chính xác các dữ kiện cần thiết và đã thể hiện các dữ kiện này trên hình vẽ như chiều cao của anh Nam, chiều dài bãi biển. GV yêu cầu nhóm 7 (nhóm có cách làm đúng) lên bảng trình bày bài làm của nhóm mình (xem hình 2). Nhóm 2 có ý kiến rằng chiều cao của anh Nam sẽ ảnh hưởng đến thời gian bơi, nhưng nhóm 7 phản biện rằng thời gian do lợi thế chiều cao của anh Nam là không đáng kể, nên có thể bỏ qua thời gian này. Các nhóm khác đều đồng ý với ý kiến phản biện của nhóm 7. Sau đó, GV kết luận vấn đề, yêu cầu các nhóm chỉnh sửa, hoàn chỉnh lại bài làm của nhóm mình.

Bước 2. Xây dựng mô hình toán học. Để giúp HS xây dựng mô hình toán học, GV đưa ra các câu hỏi sau: Trong hai đại lượng là độ dài đoạn đường trên bãi biển anh Nam cần chạy và thời gian từ lúc anh Nam thấy người bị nạn cho đến lúc tiếp cận được người đó, đại lượng nào gọi là biến số, đại lượng nào sẽ được gọi là hàm số của biến số đó? Có thể kí hiệu chúng như thế nào? Tìm phương trình hàm số theo biến số đã xác định được? Yêu cầu của bài toán 1 được quy về bài toán nào?

Kết quả của HS: Có 7/11 nhóm đều trả lời được các câu hỏi. Trong đó, có hai nhóm 1 và 2 không xác định điều kiện của biến x biểu diễn cho độ dài đoạn đường trên bãi biển mà anh Nam phải chạy. GV gọi nhóm 10 lên bảng trình bày và thuyết minh bài làm của nhóm mình (xem hình 3). Đại diện nhóm 10 giải thích bài làm của nhóm: Thời gian từ lúc anh Nam thấy người bị nạn cho đến lúc tiếp cận được người đó phụ thuộc vào độ dài đoạn đường trên bãi biển anh Nam cần chạy. Độ dài đoạn đường trên bãi biển anh Nam cần chạy là biến số và được kí hiệu là x . Thời gian từ lúc anh Nam thấy người bị nạn cho đến lúc tiếp cận được người đó là hàm số theo biến số x , được kí hiệu là t . GV nhận xét bài làm của nhóm 10 là đúng, lưu ý các nhóm về điều kiện của x , yêu cầu các nhóm còn lại hoàn thiện bài làm của nhóm mình.

Bước 3. Giải bài toán toán học đã thiết lập ở bước 2. GV yêu cầu các nhóm tìm GTNN của hàm số t đã xác định được ở bước 2. Kết quả bài làm của các nhóm: Có 8/11 nhóm giải đúng bài toán tìm GTNN của hàm số t bằng cách sử dụng đạo hàm và lập bảng biến thiên của hàm số t . Các nhóm còn lại đã giải không đúng vì lấy không chính xác

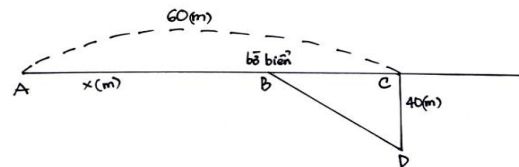
NHÓM 7

Yêu cầu của bài toán là tính độ dài đoạn bãi biển Anh Nam cần chạy để thời gian Anh Nam nhìn thấy người bị nạn đến khi tiếp cận được người đó là nhỏ nhất.

Các dữ kiện cần thiết là khoảng cách 60m từ chỗ Anh Nam đứng đến vị trí ở cuối bãi biển cách người bị nạn 40m, khoảng cách 40m từ vị trí người bị nạn đến bờ biển, vận tốc chạy trên bãi biển 6m/s, tốc độ bơi là 1,5m/s của Anh Nam với các dữ kiện này, cần thiết cho việc tính thời gian Anh Nam chạy trên bãi biển đến khi tiếp cận người bị nạn theo công thức quãng đường bằng tích của thời gian với vận tốc.

- Chiều dài bãi biển 200m, chiều cao của Anh Nam là dữ kiện thừa

- Gọi điểm A là vị trí ban đầu của Anh Nam, B là vị trí lúc Anh lao xuống biển, D là vị trí của người bị nạn, DC là khoảng cách từ người bị nạn đến bờ biển.



Hình 2. Kết quả xác định các dữ kiện của nhóm 7

NHÓM 10

Gọi AB là đoạn đường anh Nam chạy trên bãi biển.

BD là đoạn đường anh Nam bơi tới chỗ người bị nạn.

Đặt $AB = x$ thì $0 \leq x \leq 60$ do B nằm trong AC.

Trong $\triangle BCD \perp$ tại C

$$BD = \sqrt{40^2 + (60-x)^2} = \sqrt{x^2 - 120x + 5200}$$

Thời gian anh Nam chạy được đoạn AB = $x/6$

Thời gian anh Nam bơi từ B đến D là:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 120x + 5200}}{1,5}$$

Thời gian anh Nam chạy và bơi cho tới khi gặp người bị nạn: $t = x/6 + \frac{\sqrt{x^2 - 120x + 5200}}{1,5}$

YC BT 1: được quy về bài toán tìm GTNN của hàm số t theo biến x .

Hình 3. Nhóm 10 xây dựng mô hình toán học cho bài toán

đạo hàm của hàm số t . GV gọi nhóm 5 có cách làm đúng lên bảng trình bày và thuyết minh bài làm của nhóm mình (xem hình 4).

Các nhóm còn lại đều đồng ý với cách giải của nhóm 5. GV nhận xét, tổng kết và yêu cầu các nhóm chỉnh sửa lại bài làm nhóm mình. Các hoạt động diễn ra trong bước này có thể phát triển được biểu hiện 2 của năng lực MHHTH cho HS, đó là sử dụng công cụ đạo hàm, lập bảng biến thiên để nhận biết GTLN, GTNN của hàm số.

Bước 4. Đối chiếu, kiểm nghiệm kết quả trong thực tiễn. GV yêu cầu các nhóm kiểm tra điều kiện nghiệm của bài toán tìm GTNN của hàm số t , đánh giá tính phù hợp của nghiệm đối với bối cảnh thực tiễn và trình bày câu trả lời cho bài toán thực tiễn ban đầu.

Kết quả bài làm của HS: Đa số các nhóm đều đưa ra được đánh giá tính phù hợp nghiệm bài toán tìm GTNN của hàm số t đối với thực tiễn, đưa ra câu trả lời cho bài toán ban đầu. Tuy nhiên, trong số các diễn giải, nhóm 8 có lập luận và diễn giải tốt nhất. GV yêu cầu nhóm 8 trình bày và thuyết minh cách làm của nhóm mình (xem hình 5). Tuy nhiên, nhóm 1 có ý kiến rằng, nếu muốn rút ngắn lại thời gian thì tại sao anh Nam không chạy hết đoạn đường 60m trên bờ biển trước khi phóng xuống nước? Đại diện nhóm 8 đã giải thích rằng, nếu anh Nam chạy hết 60m và bơi đoạn đường 40m thì thời gian cứu hộ sẽ là: $60/6 + 40/1,5 = 36,67$ (s). Do đó, thời gian bị dài hơn (so với 35,82 giây).

Cả lớp đều thống nhất với phần trả lời của nhóm 1. Sau khi giải bài toán 1, HS có cơ hội phát triển các biểu hiện sau của năng lực MHHTH: Ở bước 1, sau khi xác định các dữ kiện quan trọng như: độ dài 60m của bãi biển; độ dài đoạn đường anh Nam cần chạy; khoảng cách 40m từ chỗ người bị nạn đến bờ biển; vận tốc chạy trên bãi biển 6m/s và tốc độ bơi 1,5m/s của anh Nam; loại bỏ các dữ kiện không cần thiết: chiều cao của anh Nam, chiều dài bãi biển 200m; phác thảo mô hình toán học ban đầu cho bài toán, từ đó HS hiểu hơn về vấn đề cần giải quyết. Ở bước 2, HS xác định được biến độc lập là đoạn đường anh Nam chạy trên bờ, biến phụ thuộc là thời gian anh Nam tiếp cận được người gặp nạn và xây dựng hàm số từ các biến độc lập và biến phụ thuộc; xác định được bài toán thực tiễn ban đầu quy về bài toán tìm GTNN của hàm t theo x . Do vậy, bước 1 và 2 có nhiều cơ hội cho HS phát triển biểu hiện 1 của năng lực MHHTH cho HS. Ở bước 3, HS sử dụng các quy tắc, công thức toán học để giải bài toán toán học đã lập ở bước 2, đó là dùng bảng biến thiên để khảo sát hàm số. Cuối cùng, HS xét thấy thời gian anh Nam tiếp cận người gặp nạn là 35,82s, phù hợp với thực tiễn không. Ở bước 3, 4, HS có nhiều cơ hội phát triển được biểu hiện 2, 3 của năng lực MHHTH.

Hoạt động 2. Hình thành kiến thức về GTLN, GTNN của hàm số. Sau khi tóm tắt lại quá trình giải bài toán thực tiễn trong hoạt động 1, GV lưu ý rằng: đoạn $[0; 60]$ được gọi là tập xác định của hàm số t ; giá trị của t trên đoạn $[0; 60]$ luôn lớn hơn hoặc bằng giá trị 35,82 và chỉ bằng 35,82 tại điểm $x = 49,67$; giá trị 35,82 được gọi là GTNN của hàm số t trên đoạn $[0; 60]$. Từ đó, GV yêu cầu HS dựa trên các kết quả vừa nêu, hãy khái quát hóa thành định nghĩa GTNN, GTLN của hàm số trên một tập xác định. Sau đó, GV

NHÓM 5

$$t(x) = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 - 120x + 5200}}{1,5}$$

$$t'(x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x - 60}{\sqrt{x^2 - 120x + 5200}} = \frac{\sqrt{x^2 - 120x + 5200} + 2(x - 60)}{6 \cdot \sqrt{x^2 - 120x + 5200}}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 120x + 5200} = 840 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 120x + 5200 = 57600 - 6720x + 16x^2$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 - 1800x + 52400 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1800 \pm \sqrt{1800^2 - 4 \cdot 15 \cdot 52400}}{2 \cdot 15} \approx 70,55 \text{ (loại vì } 0 \leq x \leq 60)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1800 - \sqrt{1800^2 - 4 \cdot 15 \cdot 52400}}{2 \cdot 15} \approx 49,67 \text{ (nhận vì } 0 \leq x \leq 60)$$

Với $x \in (0; 49,67)$ thì $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{t(x) - t(0)}{x - 0} < 0$;
 $x \in (49,67; 60)$ thì $\lim_{x \rightarrow 49,67} \frac{t(x) - t(49,67)}{x - 49,67} > 0$

x	0	49,67	60
$t'(x)$	-	0	+
$t(x)$	43,07	35,82	56,67

Nên min $t \approx 35,82$ tại $x = 49,67$ m
 $[0; 60]$

Vậy anh Nam cần chạy quãng đường 49,67m dọc theo bờ biển trước khi lao xuống nước để bơi đến vị trí người gặp nạn, nhằm đảm bảo đến chỗ người đó nhanh nhất với tổng thời gian là 35,82 (s)

Hình 4. Bài làm của nhóm 5

NHÓM 8

Nghiệm $x \approx 49,67$ m thỏa mãn điều kiện của biến x là $0 \leq x \leq 60$

Về bối cảnh thực tiễn, độ dài đoạn đường anh Nam chạy dọc trên bờ biển gần bằng $\frac{5}{6}$ ($\approx 49,67/60$) chiều dài từ chỗ anh Nam đứng ban đầu từ vị trí C về phía cuối bãi là hợp lý. Bởi vì anh Nam chạy dọc theo bờ biển sẽ có lợi về mặt thời gian hơn so với bơi dưới nước do vận tốc chạy lớn hơn tốc độ bơi.

Vậy anh Nam cần chạy một đoạn đường dọc theo bờ biển có độ dài 49,67 m trước khi phóng xuống biển tiếp cận người bị nạn nhanh nhất.

Hình 5. Kiểm tra tính hợp lý của kết quả trong thực tiễn của nhóm 8

chỉnh sửa các phát biểu của HS cho chính xác và đưa ra định nghĩa GTNN: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D . Số m được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min_D f(x)$. Tương tự, GV đưa ra định nghĩa GTLN của hàm số.

Tiếp theo, GV nêu quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số f như sau: tìm tập xác định của f ; tìm đạo hàm của f' ; xét dấu của f' ; lập bảng biến thiên; xác định các điểm cực trị và GTLN, GTNN của hàm số tại các điểm cực trị đó. Cuối cùng, GV lưu ý rằng để tìm GTLN, GTNN của hàm số f trên đoạn $[a; b]$, có thể sử dụng quy tắc sau: (1) Tìm đạo hàm f' ; (2) Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại; (3) Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$; (4) Gọi M là GTLN và m là GTNN trong các giá trị tìm được ở quy tắc 3. Khi đó: $M = \max_{[a;b]} f(x), m = \min_{[a;b]} f(x)$. Trong hoạt động 2, HS có nhiều cơ hội phát triển được biểu hiện 2 của năng lực MHHTH thông qua việc đưa ra được mô hình toán học để giải bài toán.

Hoạt động 3. Củng cố kiến thức. Để giúp HS củng cố kiến thức, GV phát phiếu học tập 2 có chứa bài toán 2 cho HS:

Bài toán 2: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $f(x)$.

GV yêu cầu các em đọc hiểu bài toán. Tiếp theo, GV yêu cầu HS nghiên cứu theo nhóm và trả lời các câu hỏi sau trên phiếu học tập: Yêu cầu của bài toán là gì? Các em hãy dựa trên kiến thức vừa học để giải quyết yêu cầu của bài toán.

Kết quả bài làm của các nhóm: Tất cả 11 nhóm đều tìm đúng tập xác định và GTNN của hàm số $f(x)$; 3 nhóm trả lời đúng khi cho rằng hàm số có GTLN; 8 nhóm còn lại đưa ra kết quả sai khi tìm được GTLN bằng 1. GV gọi nhóm 11 là nhóm có bài tốt lên bảng trình bày và thuyết minh bài làm của nhóm mình (xem hình 6). Nhóm 11 giải thích thêm về bài làm: Ta cần tính $f'(x)$, tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$, xét dấu của $f'(x)$. Vì phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm đơn nên $f'(x)$ đổi dấu khi x qua các nghiệm. Theo bảng biến thiên, hàm số đạt GTNN bằng 0 tại hai điểm $x = -1, x = 1$, không có GTLN vì khi x tiến đến $-\infty$ hay ∞ thì $f(x)$ có giá trị lớn vô cùng và không xác định được.

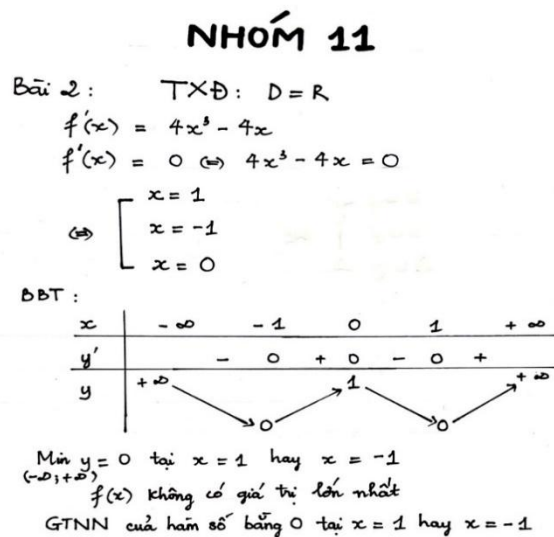
GV lưu ý cả lớp rằng giá trị cực đại của hàm số có tính chất địa phương. Cụ thể hơn, nếu chỉ xét hàm số $f(x)$ trong khoảng $(-1; 1)$ thì giá trị cực đại bằng 1 của hàm số là GTLN trong khoảng $(-1; 1)$. Tuy nhiên, nếu xét hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$, giá trị 1 không phải là GTLN của hàm số.

Các hoạt động học tập diễn ra trong bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS biểu hiện 3 của năng lực MHHTH cho HS. Cụ thể, các em thấy rằng theo bảng biến thiên, hàm số đạt GTNN bằng 0 tại hai điểm $x = -1, x = 1$ và không có GTLN vì khi x tiến đến $-\infty$ hay ∞ thì $f(x)$ có giá trị lớn vô cùng và không xác định được. Tiếp theo, GV đưa ra phiếu học tập 3 có chứa bài toán 3:

Bài toán 3: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bằng công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng (Larson & Edward, 2013).

Sau đó, GV đưa ra câu hỏi sau: (1) Yêu cầu của bài toán là gì? (2) Việc giải bài toán 3 quy về tìm GTLN của hàm số nào? (4) Tìm GTLN của hàm số đã xác định được trong câu hỏi 2; (5) GTLN của hàm số có phù hợp với bối cảnh thực tiễn không? Giải thích.

Kết quả làm bài của HS: Tất cả 11 nhóm đều trả lời đúng câu hỏi 1, 2; xác định đúng GTLN của hàm số $N(t)$. Đối với câu hỏi 4, tất cả các nhóm đều kiểm chứng được $t = 10$ thỏa điều kiện $t > 0$. Duy nhất có nhóm 6 giải



Hình 6. Nhóm 11 sử dụng bảng biến thiên để tìm GTLN, GTNN của hàm số

thích thêm được rằng khi cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng thì số lượng sẽ tăng lên, nhưng sau đó khi đã tiêu thụ hết dinh dưỡng thì chúng sẽ giảm dần là phù hợp với thực tiễn. GV nêu nhận xét bài làm của các nhóm và giải thích kết quả thu được là phù hợp với thực tiễn.

3. Kết luận

Kết quả phân tích quá trình thực nghiệm dạy học chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” cho thấy, nghiên cứu đạt được mục tiêu phát triển đầy đủ các biểu hiện của năng lực MHHTH cho HS lớp 12A8, Trường THPT Võ Văn Kiệt, TP. Hồ Chí Minh. Quy trình MHHTH bao gồm các bước có vai trò quan trọng trong quá trình giải các vấn đề/bài toán thực tiễn, giúp HS chuyển từ bài toán ban đầu thành bài toán toán học, xây dựng mô hình toán học, sử dụng các kiến thức cũng như quy tắc toán học để giải bài toán toán học và cuối cùng là kiểm tra tính phù hợp của nghiệm bài toán đối với bối cảnh thực tiễn. Bằng các câu hỏi gợi mở mang tính hướng dẫn, GV đã tạo điều kiện cho HS khám phá khái niệm GTLN và GTNN của hàm số. Bên cạnh đó, quy trình MHHTH đề xuất được cho là phù hợp thông qua sự phát triển đầy đủ của các biểu hiện năng lực MHHTH của HS.

Tài liệu tham khảo

- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22(3), 123-139.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? In: W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 45-56). New York, NY: Springer.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “filling up”. In C. R. Haines, P.L. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S.J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 73-96). New York, NY: Springer.
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Burkhardt, H. (2018). Ways to teach modelling: A 50-year study. *The International Journal on Mathematics Education*, 50(01), 61-75.
- Henning, H., & Keune, M. (2007). Levels of Modelling Competencies. In Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., Niss, M. (eds), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_23
- Larson, R., & Edward, B. (2013). *Calculus, 10th edition*. Cengage Learning.
- Lê Hồng Quang (2019). Nghiên cứu về khung năng lực mô hình hóa toán học của học sinh trung học phổ thông. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*, 64(7), 120-129.
- Nguyễn Danh Nam (2015). Năng lực mô hình hóa toán học của học sinh phổ thông. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*, 60(8), 44-52.
- Nguyễn Danh Nam (2016). *Phương pháp mô hình hóa trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông*. NXB Đại học Thái Nguyên.
- Niss, M. (2018). Advances in research and development concerning mathematical modelling in mathematics education. In F.-J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI East Asia Regional Conference on Mathematics Education: ICMI-EARCOME8*, Taipei, Taiwan, May 7-11 (Vol. 1, pp. 26-36). Taipei: National University of Taiwan.
- Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modelling in the secondary school curriculum*. The National Council of Teachers of Mathematics: Reston, Virginia.