

SỬ DỤNG CÁC KẾT NỐI TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM “NGUYÊN HÀM” (TOÁN 12)

Trang Văn Dề,
Nguyễn Phú Lộc⁺

Đại học Cần Thơ
+ Tác giả liên hệ • Email: nploc@ctu.edu.vn

Article history

Received: 30/6/2025

Accepted: 01/8/2025

Published: 20/10/2025

Keywords

Math Connections,
Derivatives, Concept
Teaching, Math 12

ABSTRACT

Mathematics provides theoretical knowledge and requires logical thinking, creativity and the ability to connect concepts. In teaching, establishing relationships between concepts, processes and practical applications plays an important role, creating a foundation for mathematical connections. Antiderivative is an important content in the 12th grade Mathematics program, often causing difficulties for students due to their abstract nature. Students struggle to understand the nature of antiderivatives, the relationship with derivatives and practical applications. Integrating mathematical connections into teaching the concept of “Antiderivative” aims to help students overcome these difficulties, improve logical thinking and creativity. The study proposes a process for teaching Mathematics through mathematical connections and illustrates this process through teaching the concept of “Antiderivative”. Teaching Mathematics based on mathematical connections can stimulate initiative, create students’ learning motivation with realistic situations, in connection with science, technology or other fields; thereby contributing to improving teaching effectiveness and developing students’ mathematical competences.

1. Mở đầu

Toán học là một môn học không chỉ cung cấp kiến thức lí thuyết mà còn đòi hỏi người học phải có khả năng tư duy logic, sáng tạo và liên kết các khái niệm một cách hệ thống. Trong quá trình dạy và học Toán, việc giúp HS hiểu sâu sắc các khái niệm toán học không chỉ dừng lại ở việc nắm bắt công thức hay phương pháp giải bài tập mà còn cần phải xây dựng được mối liên hệ giữa các khái niệm, quy trình và ứng dụng thực tiễn. Đây chính là nền tảng của kết nối toán học (KNTH) (Mathematical Connection) - một khái niệm đã được nhấn mạnh bởi NCTM (2000) như một yếu tố cốt lõi trong giáo dục toán học. Khái niệm “Nguyên hàm” là một trong những nội dung quan trọng của Giải tích, đóng vai trò nền tảng cho nhiều khái niệm khác như tích phân, vi phân và các ứng dụng trong vật lí, kinh tế, kĩ thuật. Tuy nhiên, thực tiễn dạy học khái niệm “Nguyên hàm” cho thấy, HS thường gặp nhiều khó khăn trong việc hiểu bản chất của nguyên hàm, mối quan hệ giữa nguyên hàm và đạo hàm, cách áp dụng nguyên hàm vào giải quyết các vấn đề thực tế. Để khắc phục những khó khăn này, việc sử dụng KNTH trong dạy học nguyên hàm được coi là một phương pháp hiệu quả, giúp HS không chỉ hiểu sâu hơn về khái niệm “Nguyên hàm” mà còn phát triển khả năng tư duy logic và sáng tạo.

Đã có các nghiên cứu trên thế giới và Việt Nam chỉ ra vai trò của KNTH trong dạy học các khái niệm toán học phức tạp. Bressoud (2019) đã phân tích cách kết nối lịch sử phát triển của các khái niệm giải tích trong dạy học hiện nay, giúp HS thấy được sự liên kết giữa lí thuyết và ứng dụng thực tiễn. Theo Nguyễn Dương Hoàng và Phan Anh Tuấn (2024), việc sử dụng KNTH giúp sinh viên hiểu rõ hơn về mối quan hệ giữa các khái niệm toán học và biết ứng dụng vào thực tiễn; đồng thời đề xuất các phương pháp dạy học tích cực nhằm thúc đẩy khả năng tư duy phân biện và sáng tạo của sinh viên. Bên cạnh đó, Nguyễn Thị Tân An và Lê Văn Vũ (2024) cũng phân tích cách kết nối các khái niệm tích phân và nguyên hàm với các bài toán thực tiễn, giúp HS thấy được sự liên quan của toán học trong cuộc sống hằng ngày.

Với phương pháp nghiên cứu lí luận là phương pháp nghiên cứu chính, bài báo trình bày một số vấn đề về KNTH, đề xuất quy trình sử dụng KNTH trong dạy học môn Toán và minh họa quy trình này trong dạy học khái niệm “Nguyên hàm” (Toán 12).

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Một số vấn đề lý luận

KNTH (mathematical connections) là khả năng nhận diện và sử dụng mối quan hệ giữa các khái niệm, quy trình trong toán học, giữa toán học với các môn học khác và với thực tiễn; quá trình dạy học môn Toán cần nhấn mạnh các kết nối này để giúp HS thấy được sự nhất quán, logic và ứng dụng của toán học, hiểu sâu hơn về cấu trúc và bản chất của toán học, đồng thời phát triển khả năng tư duy logic và sáng tạo (NCTM, 2000). KNTH không chỉ là việc liên kết các khái niệm toán học mà còn bao gồm ứng dụng vào thực tiễn và các môn học khác, giúp HS phát triển tư duy đa chiều và giải quyết vấn đề hiệu quả. Hơn nữa, KNTH thúc đẩy phát triển tư duy cho HS, khuyến khích các em khám phá mối liên hệ giữa các khái niệm toán học và biết vận dụng vào các tình huống thực tiễn.

KNTH có thể được phân thành nhiều dạng khác nhau, bao gồm: (1) Kết nối giữa các khái niệm toán học: Đây là mối liên hệ giữa các khái niệm toán học, chẳng hạn như giữa đạo hàm và nguyên hàm, hay giữa hình học và đại số. Việc kết nối các khái niệm toán học giúp HS xây dựng mạng lưới kiến thức vững chắc và hiểu rõ hơn về bản chất của các khái niệm và quy trình toán học (Hiebert & Carpenter, 1992). Theo Gürbüz và Erdem (2019), kết nối các khái niệm toán học không chỉ giúp HS xây dựng kiến thức bền vững mà còn hỗ trợ các em phát triển kỹ năng giải quyết vấn đề; (2) Kết nối giữa toán học và thực tiễn: Kết nối này giúp HS thấy được ứng dụng của toán học trong đời sống hằng ngày. Nghiên cứu của Eli và cộng sự (2018) cũng cho rằng, KNTH với các vấn đề thực tiễn giúp HS phát triển kỹ năng giải quyết vấn đề, đồng thời thấy được vai trò của toán học trong cuộc sống; (3) Kết nối giữa toán học và các môn học khác: Việc áp dụng toán học vào các lĩnh vực khác như Vật lý, Kinh tế hay Sinh học, Hóa học,... giúp HS nhận thức được tính ứng dụng rộng rãi của toán học trong các lĩnh vực khác nhau (Stewart, 2015); (4) Kết nối giữa các phương pháp giải quyết vấn đề: Đây là việc sử dụng các phương pháp khác nhau để giải quyết cùng một bài toán (Pambudi et al., 2020).

KNTH giúp HS nhận thức được những ứng dụng của toán học trong thực tiễn, từ đó tăng hứng thú và động lực học tập (Boaler, 1998). Việc kết nối các khái niệm toán học giúp HS phát triển tư duy phản biện và giải quyết vấn đề một cách hiệu quả, từ đó nâng cao chất lượng học tập. Bên cạnh đó, việc sử dụng công cụ kỹ thuật số trong dạy học Toán giúp HS kết nối các khái niệm toán học một cách trực quan (Eli et al., 2018). Các công cụ này cũng tạo cơ hội cho HS khám phá mối liên hệ giữa các khái niệm toán học và ứng dụng chúng vào tình huống thực tiễn.

2.2. Quy trình sử dụng các kết nối toán học trong dạy học môn Toán

Dựa vào cơ sở lý luận về KNTH ở trên, chúng tôi đề xuất một quy trình sử dụng các KNTH trong dạy học môn Toán gồm các bước sau:

Bước 1: Khởi động. Mục tiêu: (1) Khởi gợi hứng thú học tập, tạo động cơ và định hướng tư duy ban đầu cho HS; (2) Kết nối nội dung bài học với trải nghiệm, kiến thức mà HS đã có.

Tổ chức thực hiện: GV tạo tình huống có vấn đề gắn với thực tiễn cho HS thảo luận, dự đoán, nêu ý kiến cá nhân và ôn lại những kiến thức nền tảng có liên quan. KNTH cần được khai thác: (1) Kết nối với thực tiễn: Đưa ra các tình huống trong đời sống, khoa học, kỹ thuật,... để làm nổi bật tính ứng dụng của toán học; (2) Kết nối liên môn: Gắn toán học với các môn học khác như Vật lý, Công nghệ, Tin học, Sinh học,...; (3) Kết nối ngang và dọc: Gợi lại kiến thức toán học từ các lớp trước hoặc các chủ đề khác có liên quan.

Bước 2: Hình thành kiến thức. Mục tiêu: (1) HS khám phá và tự xây dựng kiến thức mới một cách có ý nghĩa; (2) HS hiểu rõ mối liên hệ giữa khái niệm mới và các kiến thức đã biết.

Tổ chức thực hiện: GV thiết kế nhiệm vụ mang tính khám phá, tình huống dẫn dắt cho HS thao tác, phân tích, phản biện và tự rút ra kiến thức. GV có sự hỗ trợ, chuẩn hóa và hệ thống hóa nội dung. KNTH cần được khai thác: (1) Kết nối khái niệm - khái niệm: Liên hệ kiến thức mới với khái niệm đã học trước đó để giúp HS xây dựng mạng lưới khái niệm; (2) Kết nối biểu diễn: Sử dụng và chuyển đổi giữa nhiều hình thức biểu diễn (hình học, đại số, bảng số liệu, ngôn ngữ, đồ thị, phần mềm,...); (3) Kết nối với thực tiễn: Lồng ghép các ví dụ, mô hình thực tế để giúp HS thấy được vai trò của kiến thức mới.

Bước 3: Luyện tập. Mục tiêu: (1) Khắc sâu kiến thức, phát triển kỹ năng cho HS thông qua luyện tập; (2) Làm rõ mối liên hệ giữa các khái niệm và quy trình.

Tổ chức thực hiện: GV cho HS luyện tập với các dạng bài đa dạng, thảo luận và phản biện lời giải; sau đó GV đánh giá quá trình, phát hiện lỗi sai và hỗ trợ điều chỉnh.

KNTH cần được khai thác: (1) Kết nối khái niệm - quy trình: Giúp HS hiểu rõ quy trình toán học (giải phương trình, vẽ đồ thị,...) dựa trên bản chất khái niệm; (2) Kết nối khái niệm - khái niệm: Tạo điều kiện để so sánh, phân

biệt, tổng quát hóa các khái niệm; (3) Kết nối giữa các biểu diễn: Yêu cầu HS chuyển đổi qua lại giữa lời giải đại số, hình học, bảng số liệu, ... hoặc phần mềm để tăng cường tư duy linh hoạt.

Bước 4: Vận dụng. Mục tiêu: (1) Phát triển tư duy sáng tạo và khả năng vận dụng kiến thức để giải quyết vấn đề; (2) Mở rộng kiến thức và kết nối với các lĩnh vực khác.

Tổ chức thực hiện: HS làm việc với các tình huống thực tiễn, đề xuất lời giải, thiết kế sản phẩm hoặc trình bày theo nhóm. GV có sự hướng dẫn, phản hồi và tạo điều kiện cho HS phát triển giải pháp sáng tạo. KNTH cần được khai thác: (1) KNTH với thực tiễn: Vận dụng kiến thức toán học vào giải quyết các vấn đề trong cuộc sống, công nghệ, môi trường, ...; (2) Kết nối liên môn: Kết hợp toán học với các lĩnh vực như Kỹ thuật, Kinh tế, ... trong các bài toán mở; (3) Kết nối khái niệm phức hợp: Tổng hợp nhiều nội dung toán học (ví dụ: kết hợp hàm số, hình học và thống kê trong một tình huống thực tiễn, ...); (4) Kết nối với các năng lực toán học: Vận dụng kiến thức để lập luận, trình bày, mô hình hóa, giải quyết vấn đề, ...

2.3. Minh họa quy trình sử dụng các kết nối toán học trong dạy học khái niệm “Nguyên hàm” (Toán 12)

Bước 1: Khởi động. Mục tiêu: khơi gợi hứng thú, tạo tình huống thực tiễn giúp HS dễ dàng tiếp cận với khái niệm nguyên hàm.

Tổ chức thực hiện: GV đưa ra bài toán sau nhằm giúp HS tiếp cận khái niệm “Nguyên hàm”: “Vận tốc của một ô tô trên một đoạn đường thẳng tại mỗi thời điểm t (tính bằng km/h) được mô tả bởi hàm số: $v(t) = 3t^2 + 1$. Em hãy tìm cách tính quãng đường $s(t)$ mà chiếc ô tô đã đi được tại một thời điểm t nào đó, với điều kiện ban đầu $s(0) = 0$ ”. Bài toán mở đầu làm nổi bật sự kết nối giữa toán học và thực tiễn, đồng thời phản ánh mối quan hệ giữa vật lý và toán học khi vận tốc là đạo hàm của quãng đường. Ngoài ra, bài toán cũng minh họa mối liên hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm, khi tính quãng đường từ vận tốc.

GV đặt câu hỏi gợi mở: Các em đã biết vận tốc là đạo hàm của quãng đường theo thời gian. Vậy làm thế nào để tìm quãng đường $s(t)$ nếu biết vận tốc $v(t)$? (Câu trả lời mong đợi: Ta cần làm ngược lại, tức là sẽ tìm một hàm số theo t mà khi lấy đạo hàm của hàm số đó sẽ là hàm $v(t)$ và đó chính là $s(t)$). Từ đó, giúp HS tìm tòi để khám phá kiến thức, giải quyết bài toán.

Bước 2: Hình thành kiến thức mới. Mục tiêu: Xây dựng khái niệm về nguyên hàm từ một bài toán thực tiễn.

Tổ chức thực hiện: Để giải quyết bài toán mở đầu, GV gợi ý HS nhớ lại mối liên hệ giữa quãng đường và vận tốc thông qua các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Nếu $s(t)$ là quãng đường đi được tại thời điểm t thì vận tốc $v(t)$ chính là đạo hàm của $s(t)$ theo thời gian, tức là: $v(t) = s'(t)$. Vậy, để tìm $s(t)$, chúng ta cần làm gì với dữ kiện $v(t) = 3t^2 + 1$?

Câu trả lời mong đợi: Cần tìm hàm số $s(t)$ sao cho $s'(t) = v(t) = 3t^2 + 1$. HS sử dụng công thức $(t^3)' = 3t^2$ và $(t)' = 1$ để tìm ra $s(t) = t^3 + t$.

Câu hỏi 2: Ngoài $s(t) = t^3 + t$, còn có hàm số nào khác mà đạo hàm của nó bằng $3t^2 + 1$ không?

Câu trả lời mong đợi: HS đưa ra nhiều kết quả khác nhau: $s(t) = t^3 + t + 1$, $s(t) = t^3 + t + 5$, ...

GV khái quát lại vấn đề: Với C là hằng số bất kỳ, $s(t) = t^3 + t + C$ đều có $s'(t) = v(t)$. Sử dụng $s(0) = 0$ ta có $C = 0$. Để tìm lời giải của bài toán, cần thực hiện một quá trình ngược lại của quá trình lấy đạo hàm, nghĩa là biết $f(x)$, tìm $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$. Trong trường hợp này, $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$. Từ đó, GV nêu định nghĩa về khái niệm nguyên hàm: “Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K ” (Trần Nam Dũng và cộng sự, 2023, tr 6).

Tiếp theo, GV cho HS luyện tập nhận biết nguyên hàm thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = 2x + 3$. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập R .

a) $G(x) = 2x^2 + 5x$; b) $F(x) = x^2 + 3x - 1$.

Với câu a trong ví dụ 1, GV có thể gợi ý cho HS cách chứng tỏ $G(x)$ không phải là nguyên hàm của $f(x)$ như sau:

Cách 1: $G'(x) = 4x + 5$; $G'(0) = 5$ và $f(0) = 3$. Do đó, tồn tại $x = 0$ mà $G'(0) \neq f(0)$ nên $G(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$.

Cách 2: $G'(x) = f(x)$ khi $4x + 5 = 2x + 3$ hay $x = -1$. Vậy chỉ tại $x = -1$ thì $G'(x) = f(x)$, nên $G(x)$ không là nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 2: Tìm các nguyên hàm có thể có của hàm số $f(x) = \cos x$.

GV có thể gợi mở cho HS cách tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ thông qua một số câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: $f(x) = \cos x$ có bao nhiêu nguyên hàm? Nguyên hàm của hàm số $f(x)$ này có dạng tổng quát là gì?

Câu trả lời mong đợi: Hàm số $f(x)$ có vô số nguyên hàm. Các nguyên hàm có dạng tổng quát là $F(x) = \sin x + C$ (C là hằng số).

Tiếp đó, GV đặt câu hỏi: Cho $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm đạo hàm của hàm số $G(x) - F(x)$? Từ đó, hãy tìm mối quan hệ giữa hàm số $G(x)$ và $F(x)$? (Câu trả lời mong đợi: $[G(x) - F(x)]' = 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$; suy ra $G(x) - F(x) = C$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, hay $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in \mathbb{R}$). GV chuẩn hóa lại kiến thức thông qua tính chất sau: “Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó: Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ; Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$, với mọi x thuộc K . Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K , kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết $\int f(x)dx = F(x) + C$ ” (Trần Nam Dũng và cộng sự, 2023, tr 7).

Trong hoạt động hình thành kiến thức về khái niệm nguyên hàm, các dạng KNTH được thể hiện khá cụ thể. Đầu tiên, HS kết nối nguyên hàm với đạo hàm thông qua bài toán thực tiễn về quãng đường và vận tốc, nhận ra nguyên hàm là quá trình ngược của đạo hàm. Thứ hai, việc áp dụng nguyên hàm để giải bài toán thực tiễn giúp HS thấy được ý nghĩa ứng dụng của khái niệm này. Thứ ba, mối liên hệ giữa khái niệm nguyên hàm và kiến thức vật lý được làm rõ qua bài toán chuyển động. Ngoài ra, các bài tập nhận biết và tìm nguyên hàm giúp HS củng cố kiến thức và hiểu được dạng tổng quát của nguyên hàm $F(x) + C$. Cuối cùng, việc chứng minh và biểu diễn nguyên hàm bằng kí hiệu tích phân $\int f(x)dx = F(x) + C$ đã kết nối lí thuyết với thực hành, giúp HS hiểu sâu hơn về bản chất của nguyên hàm và vai trò của khái niệm “Nguyên hàm” trong toán học và thực tiễn.

Bước 3: Luyện tập. Mục tiêu: Ôn tập, khắc sâu các khái niệm đã học, tăng cường kĩ năng thực hành, phát hiện và sửa lỗi sai, từ đó xây dựng sự tự tin và tạo động lực học tập hiệu quả hơn cho HS.

Tổ chức thực hiện: GV đưa ra một số ví dụ sau đây để củng cố kiến thức cho HS:

Ví dụ 3: Hãy tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$.

Câu trả lời mong đợi: $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x$ và $f(1) = 3$. Tìm hàm số $f(x)$.

Câu trả lời mong đợi: $f(x) = \int f'(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C$. Vì $f(1) = 3$ nên ta có $1^2 + C = 3 \Leftrightarrow C = 2$.

Vậy: $f(x) = x^2 + 2$.

Ví dụ 5:

Câu 1: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A) $F(x) = f(x), \forall x \in K.$

B) $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

C) $F'(x) = f'(x), \forall x \in K.$

D) $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$

Câu 2: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A) $\int f(x)dx = F'(x) + C.$

B) $\int F(x)dx = f(x) + C.$

C) $\int f(x)dx = F(x) + C.$

D) $\int F(x)dx = f'(x) + C.$

Câu 3: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

A) $\int 2f(x)dx = 2F'(x) + C.$

B) $\int 2f(x)dx = 2f(x) + C.$

C) $\int 2f(x)dx = 2F(x) + C.$

D) $\int 2f(x)dx = F(2x) + C.$

Câu trả lời mong đợi: Đáp án đúng là: Câu 1: B; Câu 2: C; Câu 3: C.

Các ví dụ trên thể hiện các dạng KNTH sau: (1) Kết nối giữa khái niệm và quy trình: Ví dụ 3 yêu cầu tìm họ nguyên hàm, thể hiện kết nối giữa khái niệm nguyên hàm và quy trình tìm nguyên hàm; (2) Kết nối giữa các khái niệm toán học: Ví dụ 4 làm rõ mối quan hệ giữa đạo hàm và nguyên hàm thông qua việc cho đạo hàm và yêu cầu tìm hàm số ban đầu; (3) Kết nối giữa các biểu diễn toán học: Các câu hỏi trắc nghiệm (ở ví dụ 5) thể hiện kết nối giữa các biểu diễn khác nhau của nguyên hàm và đạo hàm (biểu diễn hàm số, biểu diễn đạo hàm, biểu diễn nguyên hàm,...).

Bước 4: Vận dụng. Mục tiêu: Nâng cao kỹ năng xác định họ nguyên hàm của các hàm số và thể hiện các dạng KNTH của khái niệm nguyên hàm qua tính đa dạng của các bài tập.

Tổ chức thực hiện: GV đưa ra các bài tập sau giúp HS biết vận dụng kiến thức đã học vào thực tiễn.

Bài tập 1: Chứng minh rằng $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 3x - 2025\ln x$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \cos 2x - 3\sin 3x - \frac{2025}{x}.$$

Câu trả lời mong đợi: Lấy đạo hàm của $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos 3x - 2025\ln x$, thu được

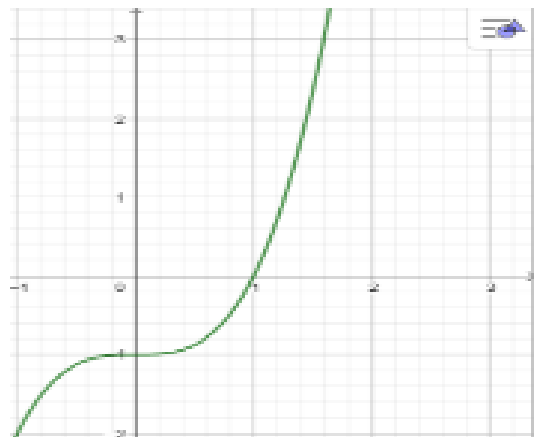
$$f(x) = \cos 2x - 3\sin 3x - \frac{2025}{x}.$$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm $x = 1$ (xem hình 1). Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Hàm số $y = F(x)$ có điểm cực trị hay không? Nếu có điểm cực trị thì điểm đó là điểm cực đại hay là điểm cực tiểu?

Câu trả lời mong đợi: Hàm số $y = F(x)$ có cực trị tại $x = 1$ và điểm cực trị này là cực tiểu.

Bài tập 3: Một vật di chuyển với vận tốc thay đổi theo thời gian được mô tả bởi hàm $v(t) = 3t + 1$ (tính bằng km/h) trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 4$ giờ. Hãy tính tổng quãng đường mà vật đã đi được.

Câu trả lời mong đợi: $s(t) = \int v(t)dt = \frac{3}{2}t^2 + t + C$. Tổng quãng đường mà vật đi được trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 4$ giờ là $s(4) - s(0) = 28$ (km/h).



Hình 1 (Nguồn: Tác giả)

Bài tập 4: Tốc độ thay đổi chi phí sản xuất tổng thể tại thời điểm x sản phẩm (với x tính bằng số lượng sản phẩm) được mô tả bởi hàm số $C'(x) = 2x + 4$ (tính bằng triệu đồng). Hãy tính tổng chi phí sản xuất khi sản xuất từ 0 đến 5 sản phẩm. Biết rằng khi chưa sản xuất sản phẩm nào thì chi phí bằng 0 đồng.

Câu trả lời mong đợi: $C(x) = \int C'(x)dx = x^2 + 4x + C$. Khi đó, tổng chi phí khi sản xuất từ 0-5 sản phẩm là $C(5) - C(0) = 45$ (triệu đồng).

Các bài tập vận dụng bao gồm các dạng KNTH như sau: Kết nối giữa đạo hàm và nguyên hàm, được thể hiện qua mối quan hệ $F'(x) = f(x)$ trong bài tập 1. Kết nối giữa đạo hàm và cực trị của nguyên hàm được trình bày trong bài tập 2. Bài tập 3 và bài tập 4 là giới thiệu kết nối giữa nguyên hàm và các lĩnh vực khác như vật lý, kinh tế.

3. Kết luận

Bài báo đã trình bày một số cơ sở lý thuyết về KNTH và đề xuất quy trình dạy học môn Toán với các KNTH và minh họa quy trình thông qua dạy học khái niệm “Nguyên hàm” dựa trên việc khai thác đa dạng các dạng kết nối này. Cụ thể, bài báo đã tập trung vào ba loại kết nối chính: Kết nối giữa nguyên hàm và các khái niệm toán học nền tảng, đặc biệt là đạo hàm, giúp HS nắm được bản chất của khái niệm một cách tự nhiên; Kết nối giữa nguyên hàm và các ứng dụng trong thực tiễn, từ bài toán vận tốc - quãng đường quen thuộc đến các ứng dụng trong Vật lý, Kinh tế, Sinh học,...; Kết nối mở rộng giữa nguyên hàm và các môn học khác, làm phong phú thêm góc nhìn và nhận thức liên môn của HS. Việc triển khai dạy học khái niệm “Nguyên hàm” với đa dạng các KNTH (với đạo hàm, hình học, thực tiễn và các hình thức biểu diễn khác nhau) giúp HS mở rộng kiến thức về nguyên hàm; hiểu sâu hơn kết nối kiến thức mới với nền tảng đã có, hiểu rõ các ứng dụng thông qua kết nối với các tình huống thực tiễn và liên môn; phát triển tư duy đa chiều nhờ đa dạng hóa cách tiếp cận (đại số, hình học, đồ thị...); tăng cường khả năng ghi nhớ và hứng thú học tập. Trong tương lai, việc tiến hành thực nghiệm sư phạm quy trình dạy học đã đề xuất trong môi trường lớp học thực tế là rất cần thiết để đánh giá một cách khách quan tính khả thi và hiệu quả của chúng. Đồng thời, việc mở rộng phạm vi nghiên cứu sang các khái niệm toán học khác và tiếp tục khám phá các hình thức kết nối đa dạng cũng là một hướng đi đầy tiềm năng, góp phần đổi mới phương pháp dạy học môn Toán theo hướng phát triển năng lực và kỹ năng giải quyết vấn đề cho HS, đáp ứng yêu cầu của giáo dục hiện đại.

Tài liệu tham khảo

- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 41-59. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.29.1.0041>
- Bressoud, D. (2019). *Calculus reordered: A history of the big ideas*. Princeton University Press.
- Eli, J., Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics*, 113(3), 120-134. <https://doi.org/10.1111/ssm.12009>
- Gürbüz, R., & Erdem, M. (2019). The role of mathematical connections in problem-solving: A case study in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 135-150. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-6>
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). Macmillan.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). *Principles and standards for school mathematics*.
- Nguyễn Dương Hoàng, Phan Anh Tuấn (2024). Dạy học chủ đề ba đường conic Toán 10 theo định hướng kết nối toán học với thực tiễn. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, 13(01S), 54-64. <https://doi.org/10.52714/dthu.13.01S.2024.1300>
- Nguyễn Thị Tân An, Lê Văn Vũ (2024). Kết nối toán học giữa đạo hàm và tích phân trong dạy học giải quyết các vấn đề thực tế. *Tạp chí Giáo dục*, 24(10), 12-17.
- Pambudi, D. S., Budayasa, I. K., & Lukito, A. (2020). The role of mathematical connections in mathematical problem solving. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 14(2), 129-144. <https://doi.org/10.22342/jpm.14.2.10985.129-144>
- Stewart, J. (2015). *Calculus: Early transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.
- Suh, J. M., & Seshaiyer, P. (2017). Mathematical connections and student understanding of mathematical concepts. *Journal of Mathematical Behavior*, 45, 97-114. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.11.001>
- Trần Nam Dũng, Trần Nam Dũng (tổng chủ biên), Trần Đức Huyền (chủ biên), Nguyễn Thành Anh (chủ biên), Vũ Như Thư Hương, Ngô Hoàng Long, Phạm Hoàng Quân, Phạm Thị Thu Thủy (2023). *Toán 12 (tập 2 - Bộ sách Chân trời sáng tạo)*. NXB Giáo dục Việt Nam.