

LÍ THUYẾT “BA THẾ GIỚI TOÁN HỌC” VÀ VẬN DỤNG TRONG DẠY HỌC MỘT SỐ KHÁI NIỆM GIẢI TÍCH Ở TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Trần Cường⁺,
Đào Thu Quyền

Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
⁺Tác giả liên hệ • Email: trancuong@hnue.edu.vn

Article history

Received: 14/7/2025

Accepted: 18/8/2025

Published: 05/11/2025

Keywords

Three Worlds of
Mathematics, calculus
concepts, integration of
technology in mathematics
education

ABSTRACT

In the context of global mathematics education, including Vietnam, shifting its focus toward developing students' competencies and creative thinking, this study employs Tall's (2004) Three Worlds of Mathematics (TWM) theory as a theoretical foundation to analyze the process of forming mathematical objects in students' thinking. Based on this theory, we designed a sequence of instructional activities on the concept of the integral, structured across the embodied, symbolic and formal worlds. These activities were implemented with the support of GeoGebra to enhance visual experiences. The findings suggest that the TWM-based instructional model holds significant potential for supporting students in developing mathematical concepts in a well-grounded manner, consistent with cognitive development processes and the competency-oriented goals of Vietnam's 2018 General Education Curriculum.

1. Mở đầu

Trong bối cảnh giáo dục hiện đại, sự phát triển nhanh chóng của KH-CN và tri thức đòi hỏi đổi mới sâu rộng về mục tiêu và phương pháp dạy học. Giáo dục không còn giới hạn ở việc truyền đạt kiến thức mà hướng đến phát triển tư duy, năng lực giải quyết vấn đề và khả năng học tập suốt đời. Toán học với tư cách là môn khoa học nền tảng, giữ vai trò quan trọng trong việc hình thành tư duy logic, độc lập, sáng tạo với hệ thống khái niệm là cốt lõi của toàn bộ tri thức toán học. Theo Chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) 2018, ở môn Toán nội dung giải tích xuất hiện trong chương trình lớp 11 và lớp 12 được xem là một nội dung khó với những khái niệm trừu tượng như giới hạn, đạo hàm, nguyên hàm, tích phân, ..., đòi hỏi HS phải chuyển từ tư duy đại số mang tính hữu hạn, rời rạc sang các đối tượng của giải tích với bản chất liên tục, biến thiên và vô hạn. Nếu HS chỉ tiếp nhận kiến thức một cách máy móc, thụ động, nặng về ghi nhớ sẽ dẫn đến thiếu khả năng liên kết và khái quát hóa, cản trở sự phát triển tư duy toán học bậc cao. Do vậy, rất cần có các biện pháp dạy học phù hợp, cho phép HS chuyển đổi linh hoạt giữa các mức độ nhận thức - từ thao tác cụ thể đến tư duy trừu tượng - nhằm tiếp cận bản chất của các khái niệm một cách hiệu quả.

Vấn đề này rất được quan tâm trong giáo dục toán học. Một số khung lý thuyết nhận thức như lý thuyết “trừu tượng phản chiếu” (reflective abstraction) của Piaget (1965), lý thuyết cấu trúc của Dienes (1960) hay lý thuyết về các giai đoạn phát triển nhận thức của Bruner (1966) đã đặt nền móng cho việc nghiên cứu cơ chế trí tuệ trong học toán. Trên cơ sở đó, nhiều nhà nghiên cứu giáo dục toán học đã tập trung phân tích quá trình hình thành khái niệm và nhận thức về đối tượng toán học trong tư duy người học, trong đó có khung lý thuyết Ba thế giới toán học (Three Worlds of Mathematics - TWM) do Tall (2004) đề xuất. Có thể nói, TWM cung cấp một nền tảng nhận thức rõ ràng cho việc tổ chức các hoạt động học tập, đặc biệt là trong quá trình chuyển từ thao tác cụ thể sang tư duy trừu tượng. Trên bình diện quốc tế, TWM được trích dẫn khá nhiều trong các công bố (hơn 1 triệu kết quả tìm kiếm với Google Scholar), cũng như đã được vận dụng dạy học khái niệm toán học với những báo cáo tích cực. Tuy nhiên, ở nước ta, có thể nói TWM còn rất mới mẻ, cho đến nay, chúng tôi mới tiếp cận được một số ít công trình trong nước liên quan đến TWM trong đó có nghiên cứu của Trần Kiên Minh và cộng sự (2016) đã giới thiệu sơ lược về TWM, xây dựng các nhiệm vụ và xem xét khả năng lập luận của HS trong từng thế giới. Nhiệm vụ học tập được thiết kế trong ngữ cảnh HS đã được học khái niệm đạo hàm nhưng chưa đề cập đến việc thiết kế các hoạt động học tập giúp HS hình thành khái niệm đó.

Trong bài báo này, chúng tôi trước hết đã tiến hành nghiên cứu lý luận với thư mục tập hợp được gồm 30 công trình tiếng Anh, 10 công trình tiếng Việt được công bố trong khoảng thời gian 1983-2025 để tìm hiểu về quá trình hình thành, phát triển và những luận điểm chính của “Lý thuyết TWM và dạy học một số khái niệm giải tích”. Dựa trên căn cứ lý luận xác lập được, chúng tôi cũng tiến hành tổng kết kinh nghiệm và tham khảo ý kiến chuyên gia để

đề xuất phương án dạy học khái niệm “tích phân” theo mô hình TWM, đồng thời có tham chiếu đến kết quả của một số thử nghiệm sư phạm quy mô nhỏ.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Lí thuyết Ba thế giới toán học (TWM)

Ban đầu, việc giảng dạy toán chủ yếu được thực hiện bởi các nhà nghiên cứu thuần toán học, chưa có nhiều sự liên hệ với tâm lí học. Chỉ một số ít các thuyết nhận thức của các nhà tâm lí học như thuyết của Piaget (1965), Dienes (1960), Bruner (1966) thể hiện mối liên hệ nhất định với việc giảng dạy toán học (Tall, 2014). Tại thời điểm này, lí thuyết của Piaget đang có tầm ảnh hưởng đặc biệt sâu rộng, nhấn mạnh vào các giai đoạn phát triển liên tục và sự chuyển tiếp giữa các giai đoạn nhận thức. Piaget phân loại quá trình nhận thức của con người thành ba loại trừu tượng hóa chính: (1) Trừu tượng thực nghiệm (empirical abstraction); (2) Trừu tượng giả thực nghiệm (pseudo-empirical abstraction); (3) Trừu tượng phản chiếu (reflective abstraction) (Phan Trọng Ngo và Lê Minh Nguyệt, 2016). Các tư tưởng này được Van Hiele (1985) kế thừa và cụ thể hóa trong mô hình năm cấp độ phát triển tư duy hình học, từ nhận thức trực quan đến hình học tiên đề. Dubinsky cũng quan tâm đến quá trình trừu tượng phản chiếu của Piaget, nhận ra sự gắn gũi của quá trình này với một số phương pháp, ý tưởng trong toán học, để từ đó phát triển những ý tưởng này thành lí thuyết APOS (*Hành động (Actions)* được *nội bộ hoá (interiorize)* thành *Quy trình (Processes)*, quy trình được *đóng gói (encapsulate)* thành *Đối tượng (Objects)*, đối tượng lại được tổ chức trong một *Sơ đồ (Schemas)* tổng thể) (Arnon et al., 2014). Các nghiên cứu khác, điển hình như thang SOLO của Biggs và Collis (1982), cũng khẳng định tiến trình phát triển tư duy toán học từ thao tác cụ thể đến các giai đoạn hình thức và siêu hình thức. Nhìn chung, các lí thuyết nhận thức đều đồng quan điểm về quá trình phát triển tư duy toán học: bắt đầu chuyển từ việc thực hiện các hành động cụ thể, sang việc nhận thức như một quy trình và trở thành một đối tượng toán học có thể được biểu diễn bằng kí hiệu. Quá trình này dẫn đến một cấp độ cao hơn trong tư duy - khi các đối tượng nhận thức không còn được hình thành đơn thuần qua thao tác, quy trình trực quan cụ thể mà dựa trên một hệ thống các định nghĩa và tiên đề chặt chẽ (Tall, 2014).

Đây cũng là nền tảng để Tall (2004) phát triển lí thuyết về “Ba thế giới toán học” của mình, bao gồm: (1) Thế giới hiện thân (conceptual - embodied world): Thuật ngữ “embodiment” - tạm dịch là “hiện thân”, xuất phát từ các quan điểm triết học cổ điển và khoa học nhận thức hiện đại, phản ánh cách thức các đối tượng nhận thức được hình thành trong tư duy dựa trên các tương tác trực tiếp giữa cơ thể con người và thế giới vật lí (Tall, 2014).

Trong lí thuyết TWM, Tall xây dựng thế giới hiện thân chủ yếu dựa trên công trình của Lakoff và Núñez (2000) về nguồn gốc của các ý tưởng toán học - toàn bộ tri thức toán học là sản phẩm của con người, được kiến tạo thông qua trải nghiệm cảm giác - vận động và quá trình ánh xạ khái niệm thông qua ẩn dụ ý niệm (*conceptual metaphor*). Những ẩn dụ này giúp con người thao tác với các khái niệm toán học bằng cách liên hệ chúng với những trải nghiệm quen thuộc trong đời sống hàng ngày. “Thế giới hiện thân” bao gồm: (1) Hiện thân khái niệm - tập trung vào các đặc tính của đối tượng; (2) Hiện thân hoạt động - tập trung vào các hoạt động trên đối tượng. Sự phân tách này phản ánh hai cách tiếp cận nhận thức khác nhau trong tư duy toán học: (1) Tiếp cận theo hướng cấu trúc, tập trung vào các thuộc tính trực quan và mối quan hệ nội tại của đối tượng; (2) Tiếp cận theo hướng hành động, nhấn mạnh vào các thao tác và quy tắc vận hành. Trong tiếp cận cấu trúc, các thao tác được sử dụng như công cụ khám phá đặc điểm của đối tượng, chẳng hạn đếm số cạnh của đa giác để xác định loại hình, trượt tay dọc đường cong để cảm nhận độ dốc hoặc phóng to đồ thị hàm số tại điểm có đạo hàm để nhận thấy tính chất “thẳng địa phương” và hình thành ý tưởng về tiếp tuyến. Ngược lại, trong tiếp cận hoạt động, trọng tâm đặt vào chính thao tác, chẳng hạn các hành động đếm, gộp nhóm, chia tách hay đo lường trong số học, nhận ra những thuộc tính khái quát như tính giao hoán của phép cộng. Ở đây diễn ra một sự chuyển đổi trong tư duy, từ việc tập trung vào các đặc điểm của đối tượng cụ thể, sang quá trình trừu tượng hoá hành động (operational abstraction).

(2) Thế giới biểu tượng (proceptual - symbolic world): Các biểu tượng, kí hiệu toán học được coi như cầu nối của một quy trình toán học và một khái niệm toán học. Gray và Tall (1994) gọi sự kết hợp của một kí hiệu đại diện



Hình 1. Sơ đồ chuyển hoá giữa ba thế giới toán học trong lí thuyết TWM (Tall, 2014)

cho cả quy trình lẫn kết quả của quy trình đó là một “procept”. Trong đó, “pro” xuất phát từ “process” - quy trình, “cept” xuất phát từ “concept” - khái niệm. Việc nhìn nhận một “procept” là một quy trình đóng vai trò quan trọng khi cần phân tích bản chất của đối tượng toán học dưới góc độ quy trình tạo ra nó. Chẳng hạn đối với kí hiệu tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ của hàm số $f(x)$. Đây là một quy trình phân hoạch đoạn $[a; b]$ và tính tổng diện tích của các dải hình chữ nhật có chiều cao là $f(x_k)$ khi số lượng các phân hoạch tiến tới vô hạn và kích thước tiến tới 0. Quy trình này phản ánh sự tích lũy liên tục, từ đó hình thành khái niệm diện tích dưới đường cong. Tuy nhiên, nếu chỉ dừng lại ở việc nhìn nhận các quy trình thì sẽ gây khó khăn trong việc thực hiện các thao tác toán học ở cấp độ cao hơn. Điều này đòi hỏi tất yếu một phương pháp biểu diễn hiệu quả để kết hợp giữa bộ nhớ lớn và sự tập trung nhỏ (Tall et al., 2001). Từ đó hình thành các biểu tượng, kí hiệu toán học mang nghĩa khái niệm, có thể thực hiện các thao tác như một thực thể độc lập. Ví dụ như các kí hiệu, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n)$, $f'(x)$, $\int_a^b f(x)dx$ có thể xuất hiện trong các quy trình ở cấp độ cao hơn như thực hiện các phép toán số học, so sánh,... Việc kí hiệu các đối tượng như một “procept” không chỉ giúp đơn giản hoá trong tư duy xử lí của não bộ mà còn đóng vai trò then chốt trong việc phát triển tư duy cấu trúc, mở ra khả năng xây dựng các hệ thống toán học phức tạp hơn trên nền tảng các khái niệm đã được cấu trúc. Cơ chế này tương ứng với quá trình “đóng gói” (encapsulation) và “giải đóng gói” (de-encapsulation) trong lí thuyết APOS (Armon et al., 2014) và được Sfard (1991) khẳng định như một điều kiện cần cho sự chuyển hóa từ thao tác sang khái niệm. Thế giới biểu tượng được Tall xây dựng tập trung vào sự chuyển đổi này. Điều này tạo ra sự khác biệt cơ bản giữa thế giới hiện thân - hình thành từ việc thao tác trên đối tượng cụ thể và thế giới biểu tượng - hình thành từ kết quả của các thao tác và cách chúng được biểu diễn thông qua các kí hiệu toán học.

(3) Thế giới hình thức (formal - axiomatic world): Thế giới hình thức (formal world) trong khuôn khổ lí thuyết TWM của Tall (2004) được xem như là giai đoạn phát triển cao nhất trong quá trình hình thành tư duy toán học, ở đó các đối tượng toán học được định nghĩa hoàn toàn dựa trên hệ thống tiên đề và các tính chất được suy luận logic từ các định nghĩa đó. Ưu thế của hệ thống tiên đề này là tính độc lập với ngữ cảnh. Một định lí, một cấu trúc hoặc một khái niệm hình thức giữ nguyên giá trị trong mọi hệ thống thỏa mãn các tiên đề ban đầu. Chẳng hạn, trong trải nghiệm thị giác và chuyển động vật lí thì khái niệm “liên tục” được hình dung như một quá trình chuyển động không gián đoạn: hình ảnh bàn tay vẽ một đường cong “liền” trên giấy, một vật thể di chuyển “trơn tru” trong không gian,... Trong thế giới hình thức, khái niệm “liên tục” được định nghĩa bằng định nghĩa epsilon - delta: Hàm số $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là liên tục tại điểm $a \in A$ nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x \in A$ thỏa mãn $|x - a| < \delta$ thì $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Đây là một định nghĩa được phát biểu thuần túy trong ngôn ngữ logic, không yêu cầu bất kì hình dung hình học hay thao tác cụ thể nào để xác định tính đúng sai của mệnh đề. Tính độc lập của định nghĩa epsilon - delta thể hiện ở nhiều cấp độ: (1) Tách rời hoàn toàn khỏi các biểu diễn hiện thân: một hàm số không cần có đồ thị, biểu thức đại số cụ thể hay khả năng trực quan hóa để được kiểm tra tính liên tục; (2) Có thể hoạt động trong nhiều trường hợp tổng quát - từ các tập hợp con mở của $\mathbb{R}$, đến các không gian metric hoặc không gian Banach - miễn là tồn tại một khoảng cách (metric) phù hợp. Thuật ngữ “formal” được Tall sử dụng vừa gắn với chủ nghĩa hình thức tiên đề của Hilbert trong toán học thuần túy, vừa liên hệ với giai đoạn thao tác hình thức trong lí thuyết phát triển nhận thức của Piaget - giai đoạn mà tư duy trở nên trừu tượng và không còn phụ thuộc vào các đối tượng vật lí cụ thể (Tall, 2014). Dù nhấn mạnh vai trò của định nghĩa và chứng minh tiên đề, Hilbert cũng thừa nhận rằng các khái niệm hình thức thường được bắt nguồn từ trải nghiệm trực quan và kí hiệu. Điều này cho thấy toán học hình thức không hoàn toàn tách biệt mà là kết quả của quá trình trừu tượng hóa và tái cấu trúc từ trải nghiệm ban đầu, đồng thời vẫn có khả năng quay trở lại hỗ trợ và củng cố các biểu diễn hiện thân và biểu tượng bằng lập luận chặt chẽ.

Với lí thuyết TWM, Tall không thiết lập trật tự phân cấp giữa ba thế giới mà nhấn mạnh tính linh hoạt trong chuyển hóa giữa các thế giới: từ trực quan hiện thân sang kí hiệu và hình thức để hình thành đối tượng toán học và từ hình thức quay lại trực quan nhằm làm rõ, minh họa và củng cố đối tượng. Trong dạy học, việc duy trì sự chuyển hóa qua lại này giúp tri thức không bị tách rời khỏi ngữ cảnh trực quan ban đầu, đồng thời đảm bảo khả năng vận dụng lập luận hình thức vào các tình huống cụ thể (Tall, 2014). Đây cũng là căn cứ cho phép GV thiết kế các nhiệm vụ mở, theo nghĩa cho HS phát huy khả năng vận dụng linh hoạt ở cả ba thế giới toán học. GV quan sát, xem xét xem HS nhận thức như thế nào và có xu hướng nhận thức trong thế giới nào trước, đồng thời gợi ý HS nhìn nhận vấn đề trong các thế giới còn lại (Trần Kiên Minh và cộng sự, 2016).

2.2. Vận dụng lí thuyết “Ba thế giới toán học” trong dạy học khái niệm “Tích phân”

Trước hết cần chọn một mô hình dạy học để triển khai vận dụng tinh thần của lí thuyết “Ba thế giới toán học”. Đỗ Đức Thái và cộng sự (2016) đã đưa ra tiến trình gồm bốn hoạt động chủ yếu trong dạy học khái niệm toán học

bao gồm: (1) Trải nghiệm; (2) Hình thành định nghĩa khái niệm; (3) Củng cố; (4) Vận dụng. Tiến trình này rất gần với sự chuyên hoá trong lý thuyết TWM, trong đó bao gồm 4 giai đoạn: (1) Trải nghiệm tương ứng với các hoạt động trong thế giới hiện thân; (2) Hình thành định nghĩa khái niệm tương ứng với quá trình chuyển tiếp từ thế giới hiện thân sang thế giới biểu tượng và thế giới hình thức; (3) Củng cố; (4) Vận dụng tương ứng với chiều từ thế giới hình thức quay trở lại hai thế giới còn lại để làm rõ, củng cố đối tượng, do đó chúng tôi lựa chọn tiến trình 4 bước để xây dựng các kế hoạch bài dạy. Để đưa tinh thần của lý thuyết TWM vào kế hoạch bài dạy khái niệm toán học, chúng tôi đã thử nghiệm nhiều lần, tổng kết kinh nghiệm rút ra quy trình 5 bước sau đây: (1) Tìm hiểu về lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm để xác định các biểu hiện của từng thế giới; (2) Xác định các hoạt động học phù hợp với biểu hiện của ba thế giới; (3) Lựa chọn các hoạt động đưa vào kế hoạch dạy học; (4) Triển khai dạy học, thu thập thông tin, sản phẩm hoạt động của HS để kiểm chứng các biểu hiện của ba thế giới; (5) Rút kinh nghiệm, đưa ra những điều chỉnh cần thiết. Trong khuôn khổ nghiên cứu của chúng tôi, quy trình đã được triển khai với hầu hết các khái niệm chính thuộc nội dung giải tích, mục này trình bày chi tiết về việc vận dụng với khái niệm “Tích phân”.

Trong Chương trình GDPT hiện hành, nguyên hàm được định nghĩa qua đạo hàm, tích phân được định nghĩa thông qua công thức Newton - Leibniz. Thứ tự này ngược lại so với lịch sử phát triển của hai khái niệm này trong lịch sử toán học. Tuy nhiên, với sự hỗ trợ của các công cụ, phương tiện dạy học hiện đại, có thể “hoàn cảnh hóa lại, thời gian hóa lại, cá nhân hóa lại” tri thức để dẫn dắt HS “tái khám phá” khái niệm tích phân qua con đường dạy học theo thứ tự: Tích phân → Nguyên hàm → Ứng dụng của tích phân. Theo đó, quy trình dạy học khái niệm “Tích phân” có thể xây dựng từ “phân hoạch”, “tính tổng” và “chuyển qua giới hạn” thông qua tình huống xấp xỉ diện tích các hình thang cong bằng diện tích các hình chữ nhật. Với lý thuyết TWM, nhóm tác giả xây dựng các hoạt động tương ứng trong từng thế giới, đặc biệt chú trọng sự tương tác giữa các thế giới trong quá trình hình thành khái niệm tích phân của HS. Đồng thời, các nhiệm vụ học tập được xây dựng với tiêu chí tăng cường yếu tố công nghệ trong dạy học. Mục tiêu của các nhiệm vụ được đặt ra cho HS được tóm tắt trong bảng sau, trong đó, EW chỉ “Thế giới hiện thân” (*embodied world*), PW chỉ Thế giới biểu tượng (*proceptual world*) và FW chỉ “Thế giới hình thức” (*formal world*).

Bảng 1. Bảng tóm tắt mục tiêu của các nhiệm vụ được đặt ra cho HS (Nguồn: Tác giả)

Hoạt động	Ba thế giới toán học	Mục tiêu
Nhiệm vụ 1	EW	Tính được diện tích đa giác đã cho bằng cách chia nhỏ thành các hình chữ nhật.
Nhiệm vụ 2a	EW	Sử dụng được GeoGebra vẽ được đồ thị hàm số và hình thang cong như yêu cầu.
Nhiệm vụ 2b	EW	Đưa ra được các phương án tính gần đúng diện tích S của hình phẳng trong ý a).
Nhiệm vụ 3a + 3b + 3c	EW	Sử dụng được GeoGebra chia đoạn $[1; 2]$ thành các đoạn bằng nhau, dựng các hình chữ nhật và tính tổng.
Nhiệm vụ 3d	EW	Rút ra nhận xét về các diện tích S_1, S_2, S khi n đủ lớn: “gần như trùng”, “tiến dần đến”, “xấp xỉ bằng”, ...
Định nghĩa tích phân	EW → PW	Khái quát được quy trình “chia nhỏ” → “tính tổng” → “chuyển qua giới hạn” bằng một biểu tượng biểu đạt quy trình đó: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$.
	PW → FW	Nhận biết được định nghĩa tích phân.
Nhiệm vụ 4a + 4b	EW	Sử dụng được GeoGebra biểu diễn được tập hợp các điểm $(x_k; \int_a^{x_k} f(x) dx)$.
Nhiệm vụ 4c	EW	Dự đoán được hàm số $F(x)$ có đồ thị đi qua các điểm $(x_k; \int_a^{x_k} f(x) dx)$ và rút ra nhận xét: $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc $[a; b]$.
Định nghĩa nguyên hàm	EW → PW	Khái quát được quy trình tương tự như xác định tích phân với mọi x thuộc $[a; b]$ bằng một biểu tượng biểu đạt quy trình đó: $\int f(x) dx$.
	PW → FW	Nhận biết được định nghĩa nguyên hàm.
	EW ↔ PW ↔ FW	Rút ra nhận xét: $\int f(x) dx = F(x) + C$.
Rút ra mối quan hệ của nguyên hàm và tích phân	EW ↔ PW ↔ FW	Rút ra được mối quan hệ: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Do giới hạn dung lượng của bài báo, chúng tôi không trình bày chi tiết “Kịch bản dạy học” với mô tả các nhiệm vụ, sản phẩm dự kiến của HS và hướng dẫn, hỗ trợ của GV. Các nhiệm vụ đảm bảo các yêu cầu cần đạt của Chương trình GDPT 2018: (1) Nhận biết được khái niệm nguyên hàm của một hàm số; (2) Giải thích được tính chất cơ bản của nguyên hàm; (3) Nhận biết được định nghĩa tích phân. Đối với các yêu cầu cần đạt còn lại của chương trình, trong giai đoạn củng cố, GV có thể sử dụng linh hoạt ý tưởng từ các nhiệm vụ trên để thiết kế các hoạt động cho HS khám phá các tính chất của nguyên hàm, tích phân, xác định nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp. Chẳng hạn như với các hoạt động tương tự như *Nhiệm vụ 4*, HS có thể dễ dàng xác định được nguyên hàm của hàm số lũy thừa. Tương tự đối với giai đoạn vận dụng.

3. Kết luận

Lí thuyết “Ba thế giới toán học” - TWM cung cấp một tiếp cận lí thuyết hiệu quả để phân tích quá trình hình thành và phát triển tư duy toán học của HS. Trong vận dụng vào dạy học các khái niệm giải tích, cụ thể trong nghiên cứu này là dạy học khái niệm tích phân, chúng tôi đã thiết kế chuỗi các hoạt động học tập theo tiến trình nhận thức: từ trải nghiệm trực quan (thế giới hiện thân) đến biểu diễn kí hiệu (thế giới biểu tượng) và cuối cùng là định nghĩa hình thức (thế giới hình thức). Việc tích hợp công nghệ, đặc biệt là các hệ thống đại số máy tính (CAS), phần mềm hình học tương tác và các bảng tính, cho thấy hiệu quả trong việc hiện thân hóa các đối tượng toán học trong giai đoạn đầu tiếp cận. Điều này góp phần thúc đẩy sự chuyển đổi linh hoạt giữa các thế giới trong mô hình nhận thức của Tall - đặc biệt là từ thế giới hiện thân sang thế giới biểu tượng và thế giới hình thức. Trong bối cảnh thực hiện Chương trình GDPT 2018 với trọng tâm phát triển năng lực và vận dụng toán học vào thực tiễn, cách tiếp cận này không chỉ phù hợp với định hướng đổi mới mà còn cung cấp nền tảng để HS phát triển tư duy bậc cao và phức tạp hơn ở các bậc học sau. Một số định hướng nghiên cứu có thể phát triển tiếp theo như nghiên cứu vận dụng lí thuyết TWM trong dạy học các mạch kiến thức còn lại; tiến hành nghiên cứu thực nghiệm có phân tích định lượng để đánh giá triển vọng triển khai trong thực tiễn; thiết kế và triển khai hệ thống tài liệu, công cụ hoặc nền tảng hỗ trợ GV vận dụng lí thuyết này một cách hiệu quả.

Tài liệu tham khảo

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (1st ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press.
- Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.
- Dienes, Z. P. (1960). *Building Up Mathematics*. London: Hutchinson.
- Đỗ Đức Thái, Đỗ Tiến Đạt, Nguyễn Hoài Anh, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Phạm Sỹ Nam (2016). *Tài liệu tìm hiểu chương trình môn Toán (trong Chương trình giáo dục phổ thông 2018)*. <https://dtbdtx.hnue.edu.vn/Portals/0/Tai%20lieu%20tim%20hieuh%20chuong%20trinh%20mon%20Toan.pdf>
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140. <https://doi.org/10.2307/749505>
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Piaget, J. (1965). *The Child's Conception of a Number*. New York: Norton.
- Phan Trọng Ngọ (chủ biên), Lê Minh Nguyệt (2016). *Giáo trình các lí thuyết phát triển tâm lí người*. NXB Đại học Sư phạm.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. <https://doi.org/10.1007/BF00302715>
- Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29-33.
- Tall, D. (2014). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202>
- Tall, D., Gray, E. M., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1(1), 81-104. <https://doi.org/10.1080/14926150109556452>
- Trần Kiên Minh, Phạm Văn Tuấn, Lê Thị Bạch Liên (2016). Lí thuyết ba thế giới toán học và vận dụng vào dạy học đạo hàm. *Tạp chí Khoa học Giáo dục*, 126, 13-16.
- Van Hiele, P. M. (1985). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press Inc.