

# TIẾP CẬN “KẾT NỐI TOÁN HỌC” TRONG DẠY HỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN CHỦ ĐỀ “GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ” (TOÁN 12)

Trang Văn Dẻ,  
Nguyễn Phú Lộc\*

Đại học Cần Thơ  
+ Tác giả liên hệ • Email: nploc@ctu.edu.vn

## Article history

Received: 28/9/2025

Accepted: 17/10/2025

Published: 20/01/2026

## Keywords

Math connection, maximum value, minimum value, function, Math 12

## ABSTRACT

In teaching Mathematics, utilizing mathematical connections is important in developing mathematical concepts and knowledge for students, improving their problem-solving skills and enhancing the ability to apply mathematics in practice. Teaching solving problems on the topic “The largest and smallest values of functions” (Math 12) can become more vivid and effective when implemented in the direction of connecting mathematics with practice. The study proposes a teaching process for solving problems on the topic “The largest and smallest values of functions” (Math 12) and illustrates this process through solving specific problems. In the teaching process, GeoGebra plays the role of a visual support tool, helping students visualize function graphs more clearly, discover rules and guide solutions. Integrating elements such as mathematical connections, practical applications and digital technology not only contributes to improving the quality of teaching but also promotes students’ creative thinking and problem-solving skills.

## 1. Mở đầu

Trong bối cảnh thực hiện Chương trình giáo dục phổ thông 2018 với định hướng phát triển phẩm chất và năng lực người học, việc tổ chức dạy học môn Toán theo hướng kết nối với thực tiễn đang trở thành yêu cầu cấp thiết. Chủ đề “Giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số” trong chương trình Toán 12 là một nội dung trọng tâm, thường xuất hiện trong các đề kiểm tra, đánh giá, đặc biệt là trong kì thi tốt nghiệp THPT. Cùng với cơ sở lý thuyết, việc tìm GTLN, GTNN của hàm số còn có nhiều ứng dụng trong thực tiễn và các ngành khoa học như vật lý, kinh tế, kỹ thuật, ... Tuy nhiên, thực tiễn dạy học giải các bài toán cho thấy, GV còn thiên về kỹ thuật giải mà chưa khai thác nhiều về bản chất toán học và mối liên hệ giữa các kiến thức đã học. Với chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số”, việc thiết lập kết nối toán học (KNTH) có thể được thể hiện ở nhiều khía cạnh: kết nối giữa hàm số và đạo hàm, giữa hình học và đại số thông qua đồ thị hàm số; kết nối với kiến thức lớp 10, 11 như bất đẳng thức, hệ thức lượng trong tam giác, hay các bài toán thực tế. Việc thiết lập KNTH giữa các khái niệm, giữa toán học với môn học khác và với thực tiễn không chỉ giúp HS hiểu sâu bản chất của kiến thức mà còn phát triển tư duy linh hoạt, sáng tạo trong giải quyết vấn đề (Hiebert và Carpenter, 1992; Ndiung và Nendi, 2018).

Trên thế giới, các nghiên cứu của Blum và Niss (1991), Boaler (1998), Kaiser (2020) chỉ ra rằng, khi HS được tiếp cận bài toán thông qua các tình huống thực tiễn có ý nghĩa, các em không chỉ hiểu sâu kiến thức mà còn phát triển năng lực phát hiện và định hướng cách giải quyết vấn đề. Tại Việt Nam, Nguyễn Hữu Châu (2015) cho rằng, việc KNTH với thực tiễn là cần thiết nhưng đòi hỏi phải có sự hỗ trợ về phương pháp và công cụ dạy học. Gần đây, nghiên cứu của Nguyễn Thị Truyền (2024) đã cho thấy, có thể sử dụng phần mềm GeoGebra giúp HS có nhiều hứng thú trong học tập bằng các ứng dụng minh họa các khái niệm, giúp GV chuyển tải được nhiều kiến thức, hiệu quả cao. Xuất phát từ thực tiễn đó, trong bài báo này, chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu lý luận để trình bày một số vấn đề về KNTH trong dạy học môn Toán và dạy học chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” (Toán 12); tiếp đó đề xuất quy trình sử dụng KNTH trong dạy học giải các bài toán chủ đề này và minh họa quy trình thông qua dạy học giải một số bài toán cụ thể.

## 2. Kết quả nghiên cứu

### 2.1. Kết nối toán học trong dạy học môn Toán

“KNTH” (mathematical connections) là khả năng nhận diện và sử dụng mối quan hệ giữa các khái niệm, quy trình trong toán học, giữa toán học với các môn học khác và với thực tiễn; quá trình dạy học môn Toán cần nhấn mạnh các kết nối này để giúp HS thấy được sự nhất quán, logic và ứng dụng của toán học (NCTM, 2000). Trong bối

cảnh giáo dục hiện đại, KNTH được coi là một định hướng quan trọng nhằm phát triển năng lực tư duy và khả năng vận dụng kiến thức cho người học. Hội đồng quốc gia GV Toán học Hoa Kỳ NCTM (2000) đề xuất việc tổ chức dạy học cần tạo cơ hội cho HS khám phá, hình thành và vận dụng KNTH để xây dựng hệ thống kiến thức logic và ứng dụng được trong nhiều ngữ cảnh.

Cách tiếp cận KNTH nhấn mạnh rằng, kiến thức toán học không nên trình bày như một tập hợp các đơn vị rời rạc, mà cần được tổ chức thành một mạng lưới khái niệm và quy trình có liên hệ chặt chẽ. Những liên kết này không chỉ giới hạn trong nội dung môn Toán, mà còn mở rộng đến các lĩnh vực khoa học, công nghệ, kinh tế và đời sống xã hội. Boaler (1998) cho rằng, toán học là một cấu trúc ý tưởng linh hoạt, giúp con người lí giải và đơn giản hóa các hiện tượng phức tạp trong thế giới thực. Nhờ đó, toán học không chỉ là công cụ lí luận mà còn là ngôn ngữ chung cho tư duy sáng tạo và ứng dụng đa ngành (Leikin và Zazkis, 2010). Hiebert và Carpenter (1992) khẳng định, người học sẽ hiểu sâu kiến thức hơn nếu họ nhận ra được mối quan hệ giữa các phần kiến thức đã học. Vì vậy, KNTH giúp HS hình thành tư duy linh hoạt, khả năng vận dụng kiến thức vào nhiều bối cảnh khác nhau, cũng như phát triển tư duy phân biện và năng lực giải quyết vấn đề. Stillman và cộng sự (2010) nhấn mạnh rằng, khi HS được học trong môi trường khuyến khích tìm kiếm các kết nối, họ sẽ không chỉ nắm vững kiến thức mà còn có khả năng ứng dụng chúng vào thực tiễn và trong các lĩnh vực KH-CN.

Về phương diện phân loại, KNTH có thể được chia thành 4 dạng cơ bản, phản ánh các chiều kết nối giữa tri thức toán học với chính nó, với các môn học khác, với thực tiễn cuộc sống, với các công cụ dạy học, gồm: (1) Kết nối trong nội bộ môn Toán. Đây là dạng kết nối phản ánh mối quan hệ giữa các chủ đề về đại số, hình học, giải tích, xác suất - thống kê, cũng như giữa các phương pháp giải hoặc cách biểu diễn khác nhau của cùng một bài toán; (2) Kết nối liên môn, tức là mối quan hệ giữa toán học với các lĩnh vực khác như Vật lí, Hóa học, Kinh tế, Sinh học, Tin học,... Toán học trong trường hợp này đóng vai trò như một công cụ mô hình hóa, lí giải và dự đoán các hiện tượng trong các lĩnh vực; (3) Kết nối với thực tiễn, thể hiện qua việc vận dụng toán học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn như dự đoán chi phí, phân tích dữ liệu xã hội, tối ưu hóa nguồn lực, đánh giá rủi ro,... Dạng kết nối này góp phần nâng cao ý thức của HS về tính thiết thực của toán học và tạo động lực học tập tích cực hơn; (4) Kết nối với công cụ dạy học, tức là việc tích hợp công nghệ vào quá trình dạy và học Toán. Việc sử dụng công nghệ giúp HS dễ dàng khám phá, kiểm chứng và trực quan hóa các mối quan hệ toán học, từ đó phát triển khả năng khám phá độc lập và sáng tạo trong học tập (Leikin và Zazkis, 2010). Bốn dạng kết nối trên không tồn tại tách rời mà có sự tương tác, hỗ trợ và bổ sung cho nhau trong quá trình dạy học. Việc phát triển cho HS khả năng KNTH không chỉ giúp các em học tốt môn Toán, mà còn góp phần hình thành tư duy hệ thống, tư duy tích hợp.

## **2.2. Kết nối toán học trong dạy học chủ đề “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số” (Toán 12)**

Sau khi học xong chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” (Toán 12), HS cần đạt được các yêu cầu sau: - Về kiến thức: (1) HS hiểu và phát biểu được định nghĩa GTLN, GTNN của hàm số trên một tập xác định; (2) Nắm được các phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn, một khoảng hoặc trên toàn bộ miền xác định như: Dựa vào đạo hàm để tìm cực trị và so sánh với các giá trị tại biên; Sử dụng bảng biến thiên để tìm GTLN, GTNN của hàm số; Biết áp dụng điều kiện cần để hàm số đạt cực trị trong các bài toán liên quan, nhận biết và phân biệt được các trường hợp có và không có GTLN, GTNN; - Về kĩ năng: (1) Biết sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên để tìm GTLN, GTNN của hàm số trên các miền cho trước; (2) Giải thành thạo các bài toán tìm GTLN, GTNN trong các bài toán thực tế hoặc bài toán có điều kiện ràng buộc; (3) Biết trình bày lời giải một cách rõ ràng, logic và chính xác; - Về Thái độ: Hình thành tính cẩn thận, tư duy logic trong quá trình giải toán; - Về định hướng phát triển năng lực cho HS: Năng lực tư duy và lập luận toán học, Năng lực mô hình hóa toán học, Năng lực giải quyết vấn đề; Năng lực giao tiếp toán học; Năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học Toán.

Trong chương trình Toán 12, chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” thể hiện rõ đặc trưng của tiếp cận KNTH, khi liên kết chặt chẽ giữa kiến thức đạo hàm, khảo sát hàm số và giải các bài toán tối ưu. HS được vận dụng kiến thức về đạo hàm để xác định các điểm cực trị và so sánh với các giá trị biên nhằm tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một khoảng xác định. Từ góc độ kết nối nội tại, chủ đề này giúp HS nhận diện mối quan hệ giữa đại số (biểu thức đạo hàm), hình học (đồ thị hàm số) và giải tích (ứng dụng đạo hàm). Điểm nổi bật trong dạy học chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” là khả năng tích hợp GeoGebra như một công cụ hỗ trợ, cho phép HS trực quan hóa sự biến thiên của hàm số, xác định nhanh các điểm cực trị, so sánh các giá trị tại biên và trên toàn miền xác định. Thông qua việc quan sát đồ thị thay đổi khi điều chỉnh tham số, HS có thể phát hiện vấn đề từ bối cảnh thực tế, nhận diện các điều kiện cực trị hoặc các điều kiện khác của hàm số. Không chỉ là công cụ vẽ, GeoGebra còn tạo điều kiện cho HS thử nghiệm, dự đoán và kiểm chứng giả thuyết, từ đó hình thành tư duy mô hình hóa và giải quyết vấn đề một cách

chủ động. Do vậy, phần mềm GeoGebra cũng là công cụ hỗ trợ hiệu quả khi dạy học chủ đề này. Tiếp cận KNTH không chỉ giúp HS nắm vững kiến thức mà còn phát triển năng lực tư duy linh hoạt, khả năng vận dụng và thấy được vai trò thiết thực của toán học trong đời sống.

### 2.3. Đề xuất quy trình sử dụng kết nối toán học trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số” (Toán 12)

Dựa trên định hướng giải quyết vấn đề của Polya (2020), chúng tôi đề xuất một quy trình dạy học giải các bài toán chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” (Toán 12) gồm 4 giai đoạn như sau:

*Giai đoạn 1: Phân tích bài toán và xác định các KNTH.* Ở bước 1, GV cần hướng dẫn HS làm rõ yêu cầu của đề bài, xác định đại lượng cần tính (ví dụ: tính diện tích hình phẳng, thể tích khối tròn xoay, độ dài đường cong,...). Đồng thời, HS cần xác định các đối tượng toán học liên quan như hàm số, miền giới hạn, hệ trục tọa độ, điều kiện xác định,... Ngoài ra, GV cần giúp HS nhận diện các KNTH tiềm ẩn như giữa tích phân với bảng biến thiên, hình học tọa độ, biểu thức đại số, các công thức quen thuộc đã biết.

*Giai đoạn 2: Lựa chọn tri thức phương pháp giải bài toán thông qua việc khai thác các KNTH.* Để giúp HS lựa chọn được các cách giải bài toán, GV có thể hướng dẫn cho HS thực hiện thông qua hai bước, trong đó bước 1 GV có thể bỏ qua nếu thiếu các công cụ, phương tiện dạy học: (1) Dự đoán kết quả của bài toán thông qua phần mềm toán học: Để giúp HS lựa chọn được các hướng giải dựa trên việc khai thác các KNTH, GV có thể sử dụng phần mềm hỗ trợ (như GeoGebra) để mô tả các hình hình học của bài toán. Dựa trên hình biểu diễn, HS phân tích bài toán ban đầu thành các bài toán thành phần thông qua kỹ thuật đại số (ví dụ: chia đoạn tích phân, xác định công thức thể tích,...); (2) Tìm các cách giải của bài toán: Từ dự đoán ở bước 1, với định hướng của GV, HS tìm được các hướng giải khác nhau của bài toán.

*Giai đoạn 3: Trình bày lời giải và thể hiện các KNTH trong quá trình giải.* Ở bước này, GV hướng dẫn HS sắp xếp và trình bày lời giải một cách logic, dựa trên các hướng giải đã chọn. Đồng thời, HS cần nhận diện và thể hiện rõ các mối liên hệ toán học xuất hiện trong quá trình thực hiện lời giải; chẳng hạn như mối quan hệ giữa đạo hàm và tích phân, giữa vận tốc và quãng đường, giữa công thức tích phân và diện tích hình phẳng. Việc nhấn mạnh các KNTH không chỉ củng cố kiến thức mà còn giúp HS hiểu sâu bản chất toán học trong nhiều ngữ cảnh.

*Giai đoạn 4: Đánh giá và mở rộng bài toán theo hướng KNTH.* Bước 4 giúp HS nhìn lại quá trình giải bài toán, kiểm tra tính hợp lý của kết quả và mở rộng tư duy thông qua việc phát hiện thêm các mối liên hệ mới. GV có thể gợi mở cho HS so sánh bài toán ban đầu với các bài toán tương tự về cấu trúc hoặc bản chất, từ đó khái quát hóa phương pháp giải. Ngoài ra, GV cũng có thể đặt ra câu hỏi ngược, thay đổi dữ kiện để HS khai thác các cách giải khác, giúp các em mở rộng hiểu biết toán học thông qua các góc nhìn đa chiều.

### 2.4. Minh họa quy trình sử dụng kết nối toán học trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất” (Toán 12)

*Bài tập 1:* Một công ty sản xuất nước giải khát dự định tung ra thị trường một sản phẩm mới. Khảo sát thị trường cho thấy: nếu giá bán mỗi chai là 15 nghìn đồng, công ty bán được 500 chai mỗi ngày; tuy nhiên, cứ mỗi lần tăng giá thêm 1 nghìn đồng thì số lượng tiêu thụ giảm 20 chai mỗi ngày. Biết rằng chi phí sản xuất mỗi chai là 5 nghìn đồng, hãy xác định mức giá bán sao cho lợi nhuận đạt GTLN.

*Giai đoạn 1: Phân tích bài toán và xác định các KNTH.* GV đặt câu hỏi định hướng: (1) Bài toán yêu cầu tìm đại lượng nào? (Câu trả lời mong đợi: Tìm giá bán tối ưu để lợi nhuận lớn nhất); (2) Em hãy biểu diễn doanh thu, chi phí và lợi nhuận theo biến số phù hợp? (Câu trả lời mong đợi: Gọi  $x$  là số nghìn đồng tăng thêm so với giá gốc 15 nghìn đồng (nghĩa là giá bán là  $15 + x$  nghìn đồng). Khi đó: Số lượng bán được là:  $500 - 20x$ ; Giá bán mỗi chai:  $15 + x$  (nghìn đồng); Chi phí mỗi chai: 5 (nghìn đồng); Khi đó doanh thu là:  $R(x) = (15 + x)(500 - 20x)$ ; Chi phí:  $C(x) = 5(500 - 20x)$ ; Lợi nhuận:  $L(x) = (15 + x)(500 - 20x) - 5(500 - 20x)$ . Điều kiện của bài toán là  $x \geq 0$  và  $0 \leq 500 - 20x$ , hay  $0 \leq x \leq 25$ .

KNTH được thể hiện thông qua: Kết nối đại số - hàm số - bài toán thực tế về kinh tế. HS cần lập mô hình toán học biểu diễn các đại lượng dưới dạng biểu thức đại số.

*Giai đoạn 2: Lựa chọn tri thức phương pháp giải bài toán thông qua việc khai thác các KNTH.*

*Bước 1: Dự đoán kết quả của bài toán thông qua phần mềm toán học.* GV có thể hướng dẫn cho HS sử dụng đồ thị trên GeoGebra để dự đoán kết quả của bài toán thông qua nhập hàm lợi nhuận theo biến  $x$ , tạo thanh trượt từ  $x = 0$  đến  $x = 25$  trên phần mềm GeoGebra (xem hình 1, trang bên). Quan sát đỉnh parabol, HS dễ dàng nhận ra giá

trị của  $x = 7,5$  thì  $L(7,5) = 6125$  đạt GTLN. Từ kết quả dự đoán, HS sẽ liên hệ và tìm ra các phương pháp, cách giải của bài toán.

KNTH thể hiện: Kết nối hình học (đồ thị) - đại số (biểu thức) - công nghệ (GeoGebra).

*Bước 2: Tìm các cách giải của bài toán.* GV có thể hướng dẫn cho HS hai cách giải cơ bản của bài toán là áp dụng bất đẳng thức và sử dụng đạo hàm như sau:

*Hướng giải 1: Áp dụng bất đẳng thức.* GV hướng dẫn cho HS áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số:  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ , sau đó áp dụng cho 2 số là  $200 + 20x$  và  $500 - 20x$ . Ta có:  $L(x) = (15 + x)(500 - 20x) - 5(500 - 20x) = (10 + x)(500 - 20x) = \frac{1}{20}(200 + 20x)(500 - 20x)$ .

Khi đó:  $L(x) \leq \frac{1}{20} \left( \frac{200 + 20x + 500 - 20x}{2} \right)^2 = 6125$ . Từ đây, HS sẽ xác định được cực trị và kết quả cần tìm.

*Hướng giải 2: Sử dụng đạo hàm.* GV có thể gợi mở cho HS xét hàm lợi nhuận:  $L(x) = (15 + x)(500 - 20x) - 5(500 - 20x) = -20x^2 + 300x + 5000$ .  $L'(x) = -40x + 300$ ,  $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7,5$ . Lập bảng biến thiên, HS sẽ tìm được cực trị và kết quả của bài toán. KNTH thể hiện: Kết nối giải tích - mô hình kinh doanh - ứng dụng đạo hàm.

*Bước 3: Trình bày lời giải.* Gọi  $x$  là số nghìn đồng tăng thêm so với giá gốc 15 nghìn đồng, khi đó: Số lượng bán được là:  $500 - 20x$ ; Giá bán mỗi chai:  $15 + x$  (nghìn đồng); Doanh thu là:  $R(x) = (15 + x)(500 - 20x)$ ; Chi phí:  $C(x) = 5(500 - 20x)$ ; Lợi nhuận:  $L(x) = (15 + x)(500 - 20x) - 5(500 - 20x) = (10 + x)(500 - 20x)$ .

Điều kiện của bài toán: Do số lượng tiêu thụ phải không âm nên  $500 - 20x \geq 0$  hay  $x \leq 25$ . Mặt khác,  $x \geq 0$  do số tiền là không âm. Vậy, điều kiện của  $x$  là:  $0 \leq x \leq 25$ . Từ đây, GV có thể hướng dẫn cho HS giải bài toán theo hai cách sau:

*Cách giải 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:*  $L(x) = (10 + x)(500 - 20x) = \frac{1}{20}(200 + 20x)(500 - 20x)$ .

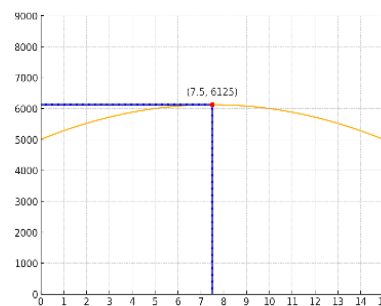
Khi đó:  $L(x) \leq \frac{1}{20} \left( \frac{200 + 20x + 500 - 20x}{2} \right)^2 = 6125$ . Dấu "=" xảy ra khi  $200 + 20x = 500 - 20x$ , hay  $x = 7,5$  (thỏa mãn điều kiện). Với  $x = 7,5$  thì mức giá bán sẽ là 22,5 nghìn đồng và lợi nhuận đạt GTLN là 6125 nghìn đồng.

*Cách giải 2: Sử dụng đạo hàm.* Xét hàm lợi nhuận  $L(x) = (10 + x)(500 - 20x)$ , có hàm  $L'(x) = -40x + 300$ ;  $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 7,5$ . Lập bảng biến thiên và từ bảng biến thiên, HS dễ dàng suy ra lợi nhuận đạt GTLN bằng 6125 nghìn đồng, khi  $x = 7,5$ , tương ứng với giá bán là 22,5 nghìn đồng.

*Giai đoạn 4: Đánh giá và mở rộng bài toán theo các KNTH.* Ở giai đoạn 4, GV hướng dẫn HS so sánh và phân tích hiệu quả từng cách giải để hình thành tri thức phương pháp. Qua đó, HS nhận ra mô hình toán học ở giai đoạn 1 là nền tảng chung, còn việc lựa chọn công cụ (đồ thị, bất đẳng thức hay đạo hàm) thể hiện khả năng chuyển đổi linh hoạt giữa các biểu diễn và cách tư duy. Đồ thị giúp trực quan hóa mối quan hệ giữa giá trị và lợi nhuận, song chỉ cho kết quả gần đúng và chưa cho cách giải; để sử dụng bất đẳng thức cần xác định đúng điều kiện của bài toán; đạo hàm cho kết quả chính xác và dễ kiểm chứng. GV có thể mở rộng bài toán bằng cách bổ sung các mối liên hệ, chẳng hạn giữa sản lượng và chi phí biến đổi, hoặc thêm các yếu tố phụ khác để phát triển khả năng KNTH và năng lực mô hình hóa toán học cho HS.

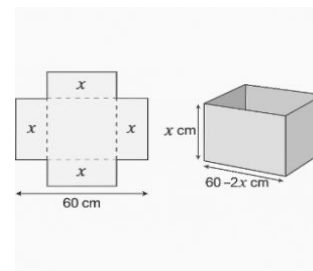
*Bài tập 2:* Một công ty sản xuất bao bì sử dụng một tấm bìa hình vuông có kích thước 60cm để làm thùng carton không nắp. Bằng cách cắt ở mỗi góc một hình vuông có cạnh  $x$  cm, rồi gấp các mép còn lại vuông góc với mặt đáy, người ta tạo ra một thùng chứa có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm giá trị của  $x$  để thể tích của thùng chứa là lớn nhất.

*Giai đoạn 1: Phân tích bài toán và xác định các KNTH.* GV đặt các câu hỏi gợi mở: (1) Bài toán yêu cầu tìm đại lượng nào? (Câu trả lời mong đợi: Tìm giá trị của  $x$  để thể tích thùng carton là lớn nhất); (2) Các dữ kiện toán học



Hình 1 (Nguồn: Tác giả)

nào xuất hiện trong bài toán? (Câu trả lời mong đợi: Tấm bìa hình vuông cạnh 60cm; các hình vuông nhỏ bị cắt có cạnh  $x$ ; thùng carton có dạng hình hộp chữ nhật không nắp); (3) Làm thế nào để mô hình hóa thể tích của thùng chứa? (Câu trả lời mong đợi: Thể tích  $V = x(60 - 2x)^2$ , vì chiều cao là  $x$  và đáy là hình vuông có chiều dài cạnh là  $60 - 2x$ ); (4) Điều kiện của bài toán là gì? (Câu trả lời mong đợi: Độ dài các cạnh phải lớn hơn 0 nên  $x > 0$  và  $60 - 2x > 0$ , hay  $0 < x < 30$ ). GV có thể sử dụng phần mềm GeoGebra để trực quan hóa, giúp HS dễ hình dung các dữ kiện của bài toán (xem hình 2).



Hình 2

KNTH thể hiện trong giai đoạn 1: - Kết nối hình học: Mô hình hình học của thùng carton từ hình vuông ban đầu; - Kết nối đại số - Giải tích: Xây dựng biểu thức thể tích theo biến  $x$ ; - Kết nối công nghệ: Ứng dụng GeoGebra để trực quan hóa bài toán, giúp HS dễ dàng tiếp cận bài toán.

*Giai đoạn 2: Lựa chọn tri thức phương pháp giải bài toán thông qua việc khai thác các KNTH.*

*Bước 1: Dự đoán kết quả của bài toán thông qua phần mềm toán học.* GV hướng dẫn HS sử dụng phần mềm GeoGebra, thông qua thanh trượt để thay đổi giá trị  $x$ , quan sát thể tích tương ứng bằng đồ thị hàm số  $V = x(60 - 2x)^2$ , dự đoán GTLN của  $V$ . Từ đó, HS dễ dàng dự đoán được  $x = 10\text{cm}$  thì thể tích sẽ đạt GTLN.

*Bước 2: Tìm các cách giải của bài toán.*

*Hướng giải 1: Sử dụng bất đẳng thức (KNTH: Đại số - Bất đẳng thức - Giải tích).* GV có thể đặt câu hỏi định hướng cho HS: Có thể sử dụng bất đẳng thức nào để dự đoán GTLN của thể tích?

Câu trả lời mong đợi: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:  $V = x(60 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (60 - 2x) \cdot (60 - 2x) \leq \frac{1}{4} \left( \frac{4x + 60 - 2x + 60 - 2x}{3} \right)^3 = 16000$ . Vậy,  $V$  đạt GTLN khi dấu “=” xảy ra, tức là  $4x = 60 - 2x \Leftrightarrow x = 10$  và  $V$  lớn nhất là  $16000\text{cm}^3$ .

*Hướng giải 2: Sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm số (KNTH: Đại số - Giải tích - Hình học).* GV đặt các câu hỏi định hướng: (1) Hàm số biểu diễn thể tích theo  $x$  có dạng như thế nào? (Câu trả lời mong đợi: Hàm số biểu diễn thể tích  $V = x(60 - 2x)^2$ ); (2) Tại sao có thể tìm GTLN của thể tích bằng đạo hàm? (Câu trả lời mong đợi: Vì thể tích là hàm liên tục và xác định trên đoạn  $[0; 30]$ , nên có thể tìm cực trị bằng cách khảo sát đạo hàm. Ta có:  $V = x(60 - 2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$ . Đây là hàm đa thức bậc 3, có  $V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600$ . Từ đó, HS xác định được GTLN của  $V$  sẽ đạt được tại nghiệm của  $V'(x) = 0$ .

*Bước 3: Trình bày lời giải.* Tấm bìa hình vuông có kích thước 60cm. Khi đó, cắt ở mỗi góc của tấm bìa một hình vuông có cạnh  $x$  cm, rồi gấp các mép còn lại vuông góc với mặt đáy, tạo ra một thùng chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao là  $x$ , cạnh đáy là  $60 - 2x$  và thể tích  $V = x(60 - 2x)^2$ . Vậy, để thùng có kích thước dương thì điều kiện là:  $x > 0$  và  $60 - 2x > 0$ , hay  $0 < x < 30$ .

*Cách giải 1: Sử dụng bất đẳng thức.* Ta có:  $V = x(60 - 2x)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4x \cdot (60 - 2x) \cdot (60 - 2x) \leq \frac{1}{4} \left( \frac{4x + 60 - 2x + 60 - 2x}{3} \right)^3 = 16000$ . Vậy,  $V$  đạt GTLN bằng 16000 ( $\text{cm}^3$ ), dấu “=” xảy ra khi  $4x = 60 - 2x \Leftrightarrow x = 10$  (thỏa mãn điều kiện bài toán).

*Cách giải 2: Sử dụng đạo hàm.* Xét hàm số  $V = x(60 - 2x)^2 = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$ , ta có  $V' = 12x^2 - 480x + 3600$ . Giải phương trình  $V'(x) = 0$ , ta được  $x = 10$  hoặc  $x = 30$ . Khi đó:  $V(0) = 0$ ;  $V(10) = 16000$ ;  $V(30) = 0$ . GV hướng dẫn HS lập bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên, HS thu được kết quả: GTLN của  $V$  đạt được là  $16000 (\text{cm}^3)$  khi  $x = 10$  (thỏa mãn điều kiện bài toán).

*Bước 4: Đánh giá và mở rộng bài toán theo các KNTH.* GV hướng dẫn HS so sánh, phân tích và rút ra tri thức phương pháp từ quá trình giải quyết vấn đề. HS nhận thấy việc chuyển từ mô hình hình học sang biểu thức đại số ở giai đoạn 1 là nền tảng để khai thác các phương pháp giải khác nhau. Việc sử dụng GeoGebra giúp trực quan hóa và dự đoán nhanh giá trị cực đại của thể tích, song chỉ cho kết quả gần đúng. Bất đẳng thức hỗ trợ xác định GTLN một cách ngắn gọn, nhưng đòi hỏi nhận diện đúng cấu trúc biểu thức. Sử dụng đạo hàm đem lại lời giải chính xác và có cơ sở lí luận rõ ràng. Từ sự đối chiếu này, HS nắm được một bài toán có thể có nhiều “con đường” để đi đến lời giải, song đều thống nhất về bản chất toán học. GV có thể mở rộng bài toán bằng cách thay đổi kích thước tấm bìa hoặc hình dạng ban đầu để HS tiếp tục phát triển khả năng KNTH và năng lực mô hình hóa toán học.

### 3. Kết luận

Bài báo đã trình bày quy trình sử dụng KNTH trong dạy học giải các bài toán chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” (Toán 12) và minh họa quy trình này thông qua giải một số bài toán cụ thể. Từ những phân tích và ví dụ minh họa, bài báo đã cho thấy việc tổ chức dạy học chủ đề “GTLN và GTNN của hàm số” theo hướng KNTH với thực tiễn, với sự hỗ trợ của GeoGebra không chỉ giúp HS hiểu sâu hơn về kiến thức mà còn phát triển khả năng phát hiện và giải quyết vấn đề trong bối cảnh thực tế. Quy trình dạy học được thiết kế đã góp phần làm rõ tính khả thi của việc lồng ghép các mối liên hệ toán học vào từng bước giải quyết vấn đề. Các bài toán minh họa cho thấy, HS có thể tiếp cận vấn đề từ nhiều hướng khác nhau, phát hiện và khai thác mối liên hệ giữa toán học với các lĩnh vực như kinh tế, hình học, công nghệ,...; đồng thời vận dụng kiến thức liên môn để giải quyết vấn đề thực tiễn.

Tuy nhiên, nghiên cứu vẫn còn một số hạn chế, đó là mới dừng lại ở việc xây dựng tiến trình lí thuyết và chưa kiểm nghiệm trong thực tiễn lớp học, các bài toán minh họa chưa phản ánh hết sự đa dạng của các tình huống thực tiễn có thể áp dụng. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục triển khai nghiên cứu thực nghiệm để đánh giá hiệu quả dạy học giải các bài toán thông qua sử dụng KNTH, với các điều kiện lớp học khác nhau; đồng thời, mở rộng phạm vi nghiên cứu sang các chủ đề toán học khác trong chương trình THPT nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn Toán theo định hướng phát triển năng lực HS.

### Tài liệu tham khảo

- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(01), 37-68. <https://doi.org/10.1007/BF00302716>SpringerLink+3Academia+3
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(01), 41-62.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Macmillan.
- Kaiser, G. (2020). The role of mathematical modelling and applications in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 52(01), 1-2.
- Leikin, R., & Zazkis, R. (2010). The content-dependence of prospective teachers' knowledge: A case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 451-466. <https://doi.org/10.1080/00207390903477435>ResearchGate
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). *Principles and standards for school mathematics*.
- Ndiung, S., & Nendi, F. (2018). The effect of mathematical connection ability on students' mathematics learning achievement. *Journal of Physics: Conference Series*, 1028, 012186. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20184200009>
- Nguyễn Hữu Châu (2015). *Một số vấn đề về dạy học toán học hiện đại*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- Nguyễn Thị Truyền (2024). Khai thác phần mềm GeoGebra trong một số tình huống dạy học môn Toán lớp 12 ở Trường trung học phổ thông Bình Phục Nhứt, huyện Chợ Gạo, tỉnh Tiền Giang. *Tạp chí Thiết bị Giáo dục*, 2(307), 93-95.
- Polya, G. (2020). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press.
- Stillman, G. A., Brown, J. P., & Galbraith, P. L. (2010). Researching applications and mathematical modelling in mathematics learning and teaching. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 1-4. <https://doi.org/10.1007/BF03217561>