

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CỦA HỌC SINH THÔNG QUA KHAI THÁC SAI LẦM TRONG DẠY HỌC TOÁN

Nguyễn Văn Thuận¹,
Nguyễn Thị Mỹ Hằng^{1,+},
Nguyễn Thị Trang²

¹Trường Đại học Vinh;
²Trường Trung học phổ thông Lê Quý Đôn, tỉnh Hà Tĩnh
+Tác giả liên hệ • Email: nguyenmyhang3008@gmail.com

Article history

Received: 04/11/2025

Accepted: 15/12/2025

Published: 20/02/2026

Keywords

Mathematical thinking and reasoning, error, error exploitation, student, mathematics, cognitive conflict

ABSTRACT

In mathematics education, mathematical thinking and reasoning are regarded as core components of mathematical competence; however, students' errors have not been sufficiently utilized as pedagogical learning resources. This study aims to clarify the role of error analysis in triggering cognitive conflict and promoting students' thinking processes. The findings indicate that analyzing errors contributes to the development of mathematical thinking and reasoning, including comparison, explanation, justification, and self-regulation. In addition, the paper proposes four pedagogical measures aligned with a five-stage process: identifying, detecting, analyzing, correcting, and generalizing errors. On this basis, the study provides a practical pedagogical framework to help teachers leverage students' errors as learning opportunities, thereby fostering mathematical thinking and reasoning.

1. Mở đầu

Chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) môn Toán (Bộ GD-ĐT, 2018) xác định năng lực tư duy và lập luận toán học (TD&LLTH) là một trong năm thành tố của năng lực toán học. Ở bình diện quốc tế, Khung toán học của PISA 2022 xác định năng lực toán học được hình thành từ các quá trình tư duy toán học, bao gồm suy luận, lập luận, khái quát hóa và giải thích các tình huống toán học (OECD, 2023). Như vậy, phát triển năng lực TD&LLTH là yêu cầu then chốt của giáo dục toán học hiện nay. Tulis và Dresel (2025) chỉ ra cách phản hồi đối với sai lầm gây ảnh hưởng rõ rệt đến chiến lược nhận thức và sự kiên trì của người học; Borasi (1994) chứng minh rằng sai lầm có thể đóng vai trò như điểm xuất phát cho hoạt động tìm tòi và phân tích; Kramarski và Zoldan (2008) chỉ ra việc hướng dẫn HS phân tích sai lầm giúp phát triển mạnh mẽ lập luận toán học trong môi trường học tập tự điều chỉnh. Ở Việt Nam, quan điểm “lỗi sai tích cực” của Nguyễn Thị Thu Thủy (2025) nhấn mạnh việc coi sai lầm là cơ hội để HS phân tư và điều chỉnh hiểu biết; Nguyễn Thị Kiều Nga (2024) khẳng định vai trò của việc phát hiện và sửa chữa sai lầm trong hình thành lập luận, đặc biệt trong giải toán và chứng minh.

Mặc dù nhiều công trình đã đề cập đến vai trò của phân tích và sửa chữa sai lầm, việc xây dựng một hệ thống biện pháp dạy học dựa trực tiếp trên sai lầm nhằm phát triển các biểu hiện cụ thể của năng lực TD&LLTH ở cấp THPT vẫn còn hạn chế. Bằng phương pháp nghiên cứu phân tích và tổng hợp tài liệu, bài báo làm rõ cơ sở lý luận về sai lầm của HS và các biểu hiện của năng lực TD&LLTH, từ đó đề xuất một tiến trình tổ chức hoạt động phân tích và sửa chữa sai lầm trong dạy học môn Toán ở THPT. Trên cơ sở đó, các biện pháp sư phạm được thiết kế nhằm hỗ trợ GV khai thác sai lầm như một nguồn học liệu, góp phần phát triển năng lực TD&LLTH của HS.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Biểu hiện của năng lực tư duy và lập luận toán học hình thành qua hoạt động phân tích và sửa chữa sai lầm

Theo Chương trình GDPT môn Toán (Bộ GD-ĐT, 2018), năng lực TD&LLTH của HS THPT được thể hiện qua ba nhóm biểu hiện chủ yếu: (1) Thực hiện thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt là phát hiện sự tương đồng và khác biệt trong các tình huống phức tạp, đồng thời lí giải được kết quả của việc quan sát; (2) Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhận ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; (3) Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp về phương diện toán học. Các biểu hiện này phản ánh khả năng tư duy logic, khả năng phân tích và lập luận dựa trên chứng cứ, cũng như khả năng tự điều chỉnh và đánh giá cách giải quyết vấn đề của bản thân. Hoạt động “phân tích và sửa chữa sai lầm” được xem là một con đường hiệu quả để hình thành các biểu hiện trên. Borasi (1994) chỉ ra rằng việc phân tích sai lầm buộc HS phải xem xét lại cấu trúc lời giải, nhận diện điểm sai và điều chỉnh cách hiểu, từ đó kích hoạt

quá trình tái cấu trúc tri thức. Trong môi trường học tập tự điều chỉnh, việc khai thác sai lầm góp phần tăng cường khả năng giải thích và lập luận, giúp HS kiểm soát và điều chỉnh quá trình tư duy của mình (Kramarski và Zoldan, 2008). Theo Tulis và Dresel (2025), phản ứng tích cực với sai lầm tạo điều kiện hình thành tư duy sâu và hiểu bản chất của quy trình giải toán, thay vì chỉ tập trung vào kết quả đúng - sai. Các nghiên cứu gần đây cho thấy việc hướng dẫn HS phân tích và sửa chữa sai lầm trong dạy học môn Toán đều cho thấy HS có khả năng lí giải nguyên nhân sai, điều chỉnh lập luận và củng cố hiểu biết khái niệm, qua đó góp phần phát triển năng lực TD&LLTH (Nguyễn Thị Kiều Nga, 2024; Nguyễn Văn Khang và Lê Hoàng Mai, 2024; Nguyễn Thị Duyệt và cộng sự, 2025). Các tình huống có lời giải sai tạo ra xung đột nhận thức, qua đó kích thích hoạt động tư duy và rèn luyện các thao tác như phân tích, so sánh, biện minh và điều chỉnh; từ đó cho thấy phân tích sai lầm cần được xem như một chiến lược dạy học có chủ đích, trong đó sai lầm được khai thác như một nguồn học liệu sư phạm nhằm phát triển năng lực TD&LLTH, thay vì chỉ bị xử lí như một hiện tượng cần loại bỏ trong dạy học môn Toán (Nguyễn Văn Thuận và Nguyễn Hữu Hậu, 2010; Nguyễn Thị Mỹ Hằng và cộng sự, 2016).

Như vậy, “phân tích và sửa chữa sai lầm” tạo ra môi trường nhận thức giàu tiềm năng giúp HS huy động và phát triển đồng thời: (1) Các thao tác tư duy (biểu hiện nhóm 1); (2) Vận dụng lập luận quy nạp - suy diễn (biểu hiện nhóm 2); (3) Thực hiện giải thích, chứng minh, điều chỉnh lời giải (biểu hiện nhóm 3). Do đó, đây là một biện pháp sư phạm quan trọng để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS THPT.

2.2. Tổ chức hoạt động khai thác sai lầm nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học

Theo Chương trình GDPT môn Toán (Bộ GD-ĐT, 2018), dạy học Toán ở cấp THPT cần tạo điều kiện để HS phân tích, so sánh, lập luận, giải thích và điều chỉnh lời giải theo quan điểm toán học. Từ đó, hoạt động khai thác sai lầm được xem là một hướng tổ chức học tập có khả năng hình thành những biểu hiện cốt lõi của năng lực TD&LLTH. Tiến trình tổ chức hoạt động này có thể được cấu trúc thành năm giai đoạn cơ bản, như trình bày trong bảng 1.

Bảng 1. Tiến trình tổ chức hoạt động khai thác sai lầm nhằm phát triển năng lực TD&LLTH

Giai đoạn	Hoạt động của GV và HS	Biểu hiện TD&LLTH được hình thành
Giai đoạn 1: Xác định và lựa chọn sai lầm điển hình	GV phân tích nội dung toán học và lựa chọn các sai lầm HS thường gặp từ bài làm, thảo luận hoặc kết quả kiểm tra. Các sai lầm được chọn phải điển hình, dễ gây mâu thuẫn nhận thức và phù hợp để HS phân tích	HS thực hiện được thao tác phân tích, so sánh và nhận diện sự không hợp lí trong lời giải (biểu hiện 1)
Giai đoạn 2: Tổ chức cho HS phát hiện sai lầm	GV thiết kế nhiệm vụ hoặc trình bày lời giải có sai sót để HS tự phát hiện. HS thảo luận, đối chiếu và nêu căn cứ chỉ ra điểm sai	HS thực hiện được quan sát, phân tích để nhận biết sự khác biệt trong lập luận toán học (biểu hiện 1)
Giai đoạn 3: Phân tích nguyên nhân và lí giải sai lầm	HS xác định nguyên nhân của sai lầm (sai khái niệm, sai quy tắc, sai suy luận...) và lí giải bản chất của lỗi	HS lập luận để giải thích tính không phù hợp của cách làm sai (biểu hiện 2)
Giai đoạn 4: Sửa chữa và điều chỉnh lời giải	Dựa trên phân tích, HS đề xuất lời giải đúng hoặc hợp lí hơn, điều chỉnh lập luận và kiểm tra tính chính xác của cách giải mới	HS giải thích, chứng minh và hoàn thiện được lập luận toán học (biểu hiện 3)
Giai đoạn 5: Khái quát hóa và rút kinh nghiệm	GV hướng dẫn HS rút ra quy tắc đúng, điều kiện áp dụng và đặc điểm của kiểu sai lầm đã gặp. HS tổng kết bài học, củng cố hiểu biết và hình thành khả năng tự điều chỉnh trong các tình huống tương tự	HS khái quát hóa, tự điều chỉnh được các sai lầm (biểu hiện 3)

Tóm lại, năm giai đoạn trên tạo thành một tiến trình liền mạch, trong đó mỗi giai đoạn đều gắn với một biểu hiện cụ thể của năng lực TD&LLTH. Tiến trình này là cơ sở để thiết kế các biện pháp sư phạm khai thác sai lầm như một nguồn học liệu trong dạy học môn Toán ở cấp THPT.

2.3. Một số biện pháp sư phạm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học thông qua khai thác sai lầm

2.3.1. Biện pháp 1: Hướng dẫn HS phân tích và sửa chữa sai lầm qua các bài toán học sinh dễ mắc lỗi

Mục tiêu: Giúp HS phát triển khả năng phát hiện, phân tích và lí giải sai lầm trong quá trình giải toán, qua đó rèn luyện thao tác tư duy và khả năng lập luận logic. **Cách thức tổ chức (giai đoạn 1-5):** GV lựa chọn các bài toán mà HS thường mắc lỗi, chú ý những sai lầm điển hình về điều kiện, mô hình hóa, áp dụng quy tắc, suy luận; HS giải bài toán hoặc đọc lại lời giải cũ của mình, của bạn và tự chỉ ra điểm chưa hợp lí. GV không giải sẵn mà đặt câu hỏi gợi

mở để HS tự nghi ngờ kết quả; GV yêu cầu HS giải thích sai ở đâu, sai vì điều gì (nêu rõ “lí do” chứ không chỉ dừng ở việc “chỉ chỗ sai”); GV khuyến khích HS đề xuất cách giải khác hoặc bổ sung bước lập luận chặt chẽ để khắc phục sai lầm; HS khái quát rút bài học chung: dạng sai lầm gì, thường gặp trong loại bài toán nào, cần lưu ý điều kiện gì trước khi áp dụng quy tắc hoặc định lí.

Ví dụ minh họa: GV lựa chọn bài toán: “Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau, được tạo từ các chữ số từ 0 đến 9?”. HS thường gặp sai lầm khi tính cả các số có chữ số hàng trăm bằng 0, dẫn đến việc đếm thừa. Đây là sai lầm điển hình khi HS chưa nhận thức rõ điều kiện cấu tạo của số có ba chữ số và chưa xem xét tính phụ thuộc giữa các bước chọn chữ số trong quy tắc nhân. GV cho HS xem lại lời giải sai, yêu cầu phân tích nguyên nhân và xây dựng lập luận đúng bằng cách phân chia trường hợp hoặc dùng phân bù. Trọng tâm của hoạt động không chỉ ở kết quả cuối cùng, mà là cách HS nhận diện quan hệ giữa điều kiện và điều chỉnh chuỗi suy luận.

Ý nghĩa sư phạm: Hoạt động này giúp HS phát triển khả năng phân tích và lí giải (biểu hiện nhóm 1), khả năng lập luận và điều chỉnh cách giải (biểu hiện nhóm 2 và 3) của năng lực TD&LLTH. Đồng thời, HS hình thành thói quen kiểm tra tính hợp lí của kết quả, thể hiện khả năng phản biện và tự điều chỉnh trong tư duy toán học.

2.3.2. Biện pháp 2: Thiết kế tình huống dạy học có yếu tố sai lầm để học sinh phân tích và sửa chữa

Mục tiêu: Tạo tình huống có vấn đề, kích thích HS phát hiện sai lầm trong lập luận, qua đó phát triển khả năng phân tích, lí giải, chứng minh và điều chỉnh giải pháp. *Cách thức tổ chức (giai đoạn 1-5):* (1) GV thiết kế một tình huống hoặc lời giải có yếu tố sai; (2) Tổ chức cho HS phân tích và thảo luận để tìm điểm chưa hợp lí; (3) HS chỉ nguyên nhân (do nhầm lẫn khái niệm, sai thao tác hay sai suy luận); (4) HS điều chỉnh, kiến tạo lại lời giải đúng và kiểm chứng lập luận; (5) GV hướng dẫn HS tổng kết loại sai lầm, rút ra điều kiện áp dụng đúng của quy tắc, định lí.

Ví dụ minh họa: GV thiết kế tình huống có chứa lời giải sai “Trong một lớp học có 30 HS, gồm 16 HS nam và 14 HS nữ. GV chọn 4 HS sao cho trong nhóm được chọn có ít nhất một HS nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?” như sau: “Công việc chọn 4 HS gồm hai giai đoạn. Giai đoạn 1: chọn 1 HS nữ từ 14 bạn nữ, có 14 cách. Giai đoạn 2: chọn 3 HS bất kì trong 29 HS còn lại, có $C_{29}^3 = 3654$ cách. Theo quy tắc nhân, có $14 \cdot 3654 = 51156$ cách chọn”.

- GV yêu cầu HS phân tích xem có điểm nào chưa hợp lí. HS so sánh với lời giải quen thuộc bằng cách tính phân bù hoặc phân chia trường hợp, nhận thấy kết quả đúng là $C_{30}^4 - C_{16}^4 = 25584$. Từ sự khác biệt kết quả, HS nghi ngờ lời giải trên có sai lầm trong quy tắc đếm hoặc quan hệ giữa các bước chọn.

- GV gợi ý đặt tên HS nữ là X_1, X_2, \dots, X_{14} , HS nam là Y_1, Y_2, \dots, Y_{16} . Giả sử ở giai đoạn 1 chọn X_1 , ở giai đoạn 2 chọn $\{X_2, Y_1, Y_2\}$, nhóm thu được là $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$. Tuy nhiên, nếu ở giai đoạn 1 chọn X_2 , ở giai đoạn 2 chọn $\{X_1, Y_1, Y_2\}$, nhóm được chọn vẫn là $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$. Do đó, kết quả bị đếm lặp. HS chỉ ra được sai lầm xuất phát từ việc áp dụng quy tắc nhân khi hai giai đoạn chọn không độc lập. Trong cách giải sai, việc chọn một HS nữ ở giai đoạn 1 và 3 HS ở giai đoạn 2 không xác định duy nhất nhóm bốn HS, bởi cùng một nhóm có thể được tạo ra từ nhiều lựa chọn khác nhau của giai đoạn 1. Hậu quả là mỗi nhóm bốn HS (có ít nhất một nữ) bị đếm lặp đúng bằng số HS nữ trong nhóm đó, dẫn đến kết quả tính toán bị lớn hơn thực tế. HS chỉ ra có hai cách điều chỉnh lời giải:

Cách 1. Tính trực tiếp theo phân bù: Số cách chọn 4 HS bất kì trong 30 HS là C_{30}^4 . Số cách chọn 4 HS toàn nam là C_{16}^4 . Suy ra, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán: $C_{30}^4 - C_{16}^4 = 25584$. *Cách 2.* Phân chia trường hợp, có 4 trường hợp: Chọn đúng 1 nữ và 3 nam, có $C_{14}^1 \cdot C_{16}^3$ cách; Chọn đúng 2 nữ và 2 nam, có $C_{14}^2 \cdot C_{16}^2$ cách; Chọn đúng 3 nữ và 1 nam, có $C_{14}^3 \cdot C_{16}^1$ cách; Chọn cả 4 nữ, có C_{14}^4 cách. Theo quy tắc cộng, có tất cả: $C_{14}^1 \cdot C_{16}^3 + C_{14}^2 \cdot C_{16}^2 + C_{14}^3 \cdot C_{16}^1 + C_{14}^4 = 25584$ cách. Hai cách đều cho cùng kết quả, củng cố tính đúng đắn của lập luận.

- GV hướng dẫn HS khái quát: “Khi bài toán “chọn” không có thứ tự, không được tách thành hai bước chọn có phụ thuộc nội dung; Khi áp dụng quy tắc nhân, cần đảm bảo các giai đoạn chọn độc lập; Khi có ràng buộc “ít nhất”, cách tiếp cận hiệu quả là tính phân bù hoặc phân chia trường hợp không giao nhau”.

Ý nghĩa sư phạm: Tình huống trên giúp HS hình thành khả năng phân tích và lí giải lập luận sai (biểu hiện 1), sử dụng linh hoạt các phương pháp quy nạp - suy diễn trong bài toán đếm (biểu hiện 2), và giải thích, chứng minh, điều chỉnh lời giải hợp lí (biểu hiện 3) trong năng lực TD&LLTH.

2.3.3. Biện pháp 3: Xây dựng hệ thống câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn dựa trên sai lầm điển hình

Mục tiêu: Giúp HS nhận biết, lí giải và điều chỉnh sai lầm thông qua lựa chọn và phân tích các phương án nhiễu, phát triển tư duy phản biện và năng lực đánh giá. *Cách thức tổ chức (giai đoạn 1-4):* (1) GV thu thập các sai lầm điển hình từ bài làm HS, chuyển hóa thành phương án nhiễu; (2) HS làm bài trắc nghiệm, lựa chọn đáp án đúng và lí giải tại sao các phương án khác sai; (3) Phân tích và lí giải sai lầm trong các phương án nhiễu; (4) HS sửa chữa lại lời giải, trình bày lại lời giải đúng.

Ví dụ minh họa: GV chọn bài toán: “Một tổ có 10 HS, trong đó có ba bạn: An, Bình, Cúc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 HS vào một hàng ghế sao cho: (1) An và Bình luôn ngồi cạnh nhau; (2) An và Cúc không được ngồi cạnh nhau?” và xây dựng các phương án nhiều từ các sai lầm của HS.

Sai lầm 1. Xem An và Bình là một khối nhưng quên hoán vị và mô hình hóa không nhất quán: HS gộp An và Bình thành một khối để đảm bảo “ngồi cạnh nhau”, sau đó coi khối này cùng 8 bạn còn lại là 9 đối tượng và cho rằng số cách sắp xếp là $9!$. Tiếp đó, để xử lý điều kiện “An và Cúc không được ngồi cạnh nhau”, HS loại trừ số trường hợp An và Cúc cạnh nhau và cho rằng số trường hợp vi phạm bằng $8!$. Từ đó đưa ra kết quả sai là $9! - 8! = 322560$. Sai lầm cốt lõi ở: (1) HS quên hoán vị nội bộ An - Bình, suy ra thiếu nhân tử $2!$; (2) Ước tính sai số trường hợp An - Cúc cạnh nhau (chỉ tính 1 cấu hình Cúc - An - Bình thay vì hai cấu hình là Bình - An - Cúc và Cúc - An - Bình).

Sai lầm 2. Đếm thừa vì chưa xử lý điều kiện thứ hai: HS gộp An - Bình thành một khối, xem tổ có 9 đối tượng, số cách sắp xếp là $9! \cdot 2! = 725760$, sai lầm cốt lõi ở đây là bỏ sót điều kiện An và Cúc không được ngồi cạnh nhau, dẫn đến lời giải chưa hoàn chỉnh.

Sai lầm 3. Loại trừ sai số trường hợp vi phạm: HS tính số trường hợp An - Bình cạnh nhau (giống sai lầm 2), rồi loại trừ số cách An - Cúc cũng cạnh nhau và số cách chọn An - Cúc cạnh nhau bằng $8!$ (cho rằng mô hình Cúc - An - Bình thành một “khối 3 người”, cùng 7 người còn lại có cách sắp xếp là $8!$), do đó số cách thỏa mãn là $2 \cdot 9! - 8! = 685440$. Sai lầm cốt lõi trong lời giải này là HS chỉ xét một cấu hình 3 người Cúc - An - Bình, trong khi để An vừa cạnh Bình lại vừa cạnh Cúc thì An phải ở giữa, nên có đúng hai cấu hình hợp lệ: Bình - An - Cúc và Cúc - An - Bình.

Đáp án của bài toán: $2 \cdot 9! - 2 \cdot 8! = 645120$. Từ đó, đề xuất các phương án trắc nghiệm cho bài toán: (A) 322560; (B) 725760; (C) 645120; (D) 685440.

- GV phát phiếu hoặc trình chiếu câu hỏi trắc nghiệm gồm bốn phương án A, B, C, D. HS làm bài cá nhân, lựa chọn đáp án mà mình cho là đúng, đồng thời ghi lại lí do lựa chọn. GV yêu cầu HS: Giải thích vì sao phương án mình chọn là đúng; Giải thích vì sao các phương án còn lại sai. Qua đó, HS tự bộc lộ lập luận, cũng như thể hiện quan niệm sai lầm tiềm ẩn nếu lựa chọn phương án nhiều.

- GV tổ chức thảo luận nhóm để HS phân tích ba phương án sai và chỉ ra sai lầm ẩn sau mỗi phương án: Phương án A (322560): chưa hoán vị An - Bình và ước lượng sai số trường hợp An và Cúc ngồi cạnh nhau. Phương án B (725760): đếm đúng số trường hợp An - Bình cạnh nhau nhưng bỏ sót hoàn toàn điều kiện “An và Cúc không được ngồi cạnh nhau”. Phương án D (685440): đã loại trừ nhưng chỉ xét một cấu hình Cúc - An - Bình thay vì hai cấu hình có thể xảy ra (An ở giữa). GV điều phối để HS nhận ra rằng: mỗi phương án nhiều tương ứng với một kiểu sai lầm phổ biến: sai mô hình hóa, sai khi áp dụng quy tắc nhân, hoặc sai khi phân tích cấu hình bị loại trừ.

- GV hướng dẫn HS cùng xây dựng lại lập luận đúng: Gộp An - Bình thành một khối, có $2!$ cách hoán vị trong khối. Xếp khối An và Bình cùng 8 HS khác, $9!$ cách. Loại trừ các trường hợp An - Cúc cạnh nhau: An phải ngồi giữa, có 2 cấu hình hợp lệ (Bình - An - Cúc và Cúc - An - Bình), mỗi cấu hình cùng 7 bạn còn lại tạo $8!$ cách. Số cách thỏa mãn là: $2 \cdot 9! - 2 \cdot 8! = 645120$. HS kiểm chứng lại từng bước, đảm bảo không đếm lặp và không bỏ sót trường hợp. Qua đó, HS luyện tập lập luận chặt chẽ, kiểm soát điều kiện, tránh mô hình hóa sai.

- GV hướng dẫn HS tổng kết lại những nguyên tắc chung khi giải các bài toán sắp xếp có điều kiện: (1) Trong các bài toán đếm có ràng buộc, việc mô hình hóa quan hệ “ngồi cạnh nhau/không cạnh nhau” cần được thực hiện một cách chính xác; kiểm tra tính đầy đủ và không trùng lặp; (2) Khi gộp các đối tượng thành “khối”, phải xem xét đầy đủ số các hoán vị nội bộ trong khối và xác định đúng số cấu hình vi phạm điều kiện để loại trừ; (3) Việc phân tích các phương án nhiều trong câu hỏi trắc nghiệm giúp HS phát hiện mô hình sai, lí giải nguồn gốc sai lầm và củng cố tiêu chí đánh giá lập luận đúng, qua đó phát triển khả năng đánh giá - giải thích - bác bỏ các lập luận sai.

Ý nghĩa sư phạm: Hoạt động phân tích phương án nhiều giúp HS thể hiện rõ năng lực TD&LLTH: Phát hiện và lí giải sai lầm (biểu hiện 1); Kiểm chứng lập luận bằng suy luận logic (biểu hiện 2); Giải thích và bảo vệ lời giải đúng (biểu hiện 3).

2.3.4. Biện pháp 4: Tổ chức cho học sinh phân hồi và viết nhật kí học tập về sai lầm

Mục tiêu: Phát triển năng lực phản tư cho HS thông qua việc tự đánh giá sai lầm, khái quát hóa kinh nghiệm nhận thức và điều chỉnh chiến lược tư duy; đồng thời củng cố các biểu hiện của năng lực TD&LLTH thông qua hoạt động giải thích, chứng minh và điều chỉnh lời giải. *Cách thức tổ chức* (giai đoạn 4-5): Sau khi hoàn thành hoạt động phân tích và sửa sai, GV yêu cầu HS viết nhật kí học tập ghi lại sai lầm - nguyên nhân - cách sửa - bài học rút ra; tổ chức cho HS trao đổi và phân hồi lẫn nhau về tính hợp lí của lập luận và cách điều chỉnh lời giải; HS hoàn thiện lại phần trình bày của mình dựa trên phân hồi; GV tổng hợp và khái quát các dạng sai lầm, nhấn mạnh phương pháp nhận diện và sửa chữa hiệu quả, giúp HS hình thành chiến lược tư duy chung cho các bài toán tổ hợp.

Ví dụ minh họa: Sau khi HS phân tích và sửa chữa sai lầm bài toán “Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số đôi một khác nhau, được tạo từ các chữ số từ 0 đến 9?”, GV yêu cầu HS viết nhật kí học tập về sai lầm đã gặp.

Một bản ghi chép tiêu biểu có nội dung như sau: “Lỗi sai: Đếm cả các trường hợp chữ số hàng trăm bằng 0 và áp dụng quy tắc nhân khi các bước chọn không độc lập; Nguyên nhân: Chưa phân tích điều kiện hình thành số có ba chữ số; chưa nhận diện sự phụ thuộc giữa các bước chọn chữ số nên sử dụng quy tắc nhân một cách máy móc; Cách sửa: Phân chia trường hợp để bảo đảm trong mỗi trường hợp đều thỏa mãn điều kiện áp dụng quy tắc nhân: *Trường hợp 1:* Hàng đơn vị bằng 0, suy ra hàng trăm có 9 cách, hàng chục có 8 cách, ta có: $9 \cdot 8 = 72$ số; *Trường hợp 2:* Hàng đơn vị thuộc $\{2, 4, 6, 8\}$ (4 cách), hàng trăm có 8 cách, hàng chục có 8 cách, được $4 \cdot 4 \cdot 8 = 256$ số. Tổng cộng có $72 + 256 = 328$ số thỏa mãn.

Bài học rút ra: “Cần xem xét điều kiện ẩn của bài toán và phân tích quan hệ giữa các bước chọn trước khi áp dụng quy tắc đếm”. Cuối cùng, HS trao đổi nhật kí trong nhóm, nhận xét điểm hợp lí trong lập luận của bạn học. GV tổng hợp các dạng sai lầm xuất hiện (sai do không nhận diện điều kiện, sai do áp dụng quy tắc nhân khi các bước phụ thuộc, sai do bỏ sót trường hợp) và chỉ ra chiến lược kiểm soát sai lầm trong các bài toán đếm.

3. Kết luận

Nghiên cứu đã xác lập cơ sở lí luận cho việc khai thác sai lầm như một nguồn học liệu sư phạm trong dạy học môn Toán nhằm phát triển năng lực TD&LLTH. Bài báo làm rõ mối quan hệ giữa các giai đoạn của quá trình phân tích - sửa chữa sai lầm với ba nhóm biểu hiện của năng lực TD&LLTH, đồng thời đề xuất bốn biện pháp sư phạm cụ thể: (1) Phân tích và sửa chữa sai lầm qua bài toán HS dễ mắc lỗi; (2) Thiết kế tình huống dạy học có yếu tố sai lầm; (3) Xây dựng hệ thống câu hỏi trắc nghiệm dựa trên sai lầm điển hình; (4) Tổ chức phản hồi, viết nhật kí học tập. Mỗi biện pháp đều phản ánh tiến trình 05 giai đoạn, góp phần tạo môi trường học tập tích cực, đồng thời đảm bảo tính kế thừa, giúp HS phát triển giữa các biểu hiện của năng lực TD&LLTH. So sánh với các tiếp cận quốc tế cho thấy các biện pháp đề xuất phù hợp với xu hướng dạy học dựa trên sai lầm, nhưng hiệu quả phụ thuộc vào năng lực sư phạm của GV và mức độ sẵn sàng của HS. Do đó, cần có các nghiên cứu thực nghiệm tiếp theo trên nhiều chủ đề Toán và bối cảnh lớp học để kiểm chứng tác động và xác định điều kiện triển khai phù hợp.

Tài liệu tham khảo

- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as “springboards for inquiry”: A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.25.2.0166>
- Kramarski, B., & Zoldan, S. (2008). Using errors as springboards for enhancing mathematical reasoning in a self-regulated learning environment. *The Journal of Educational Research*, 102(2), 137-151.
- Nguyễn Thị Duyên, Nguyễn Lộc Trường Tài, Nguyễn Thị Mai Thủy (2025). Hiểu nhầm khái niệm của học sinh trong học tập chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12): Một nghiên cứu trường hợp. *Tạp chí Giáo dục*, 25(12), 30-35. <https://tcgd.tapchigiaoduc.edu.vn/index.php/tapchi/article/view/3500>
- Nguyễn Thị Kiều Nga (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học giải các bài toán chủ đề “Đa thức” ở trung học cơ sở. *Tạp chí Giáo dục*, 24(12), 6-10. <https://tcgd.tapchigiaoduc.edu.vn/index.php/tapchi/article/view/1999>
- Nguyễn Thị Mỹ Hằng, Phạm Xuân Chung, Trương Thị Dung (2016). *Rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường Trung học phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn Thị Thu Thủy (2025). Tác động của “lỗi sai tích cực” đến động lực và nhận thức của người học. *Tạp chí Tâm lí - Giáo dục*, 31(07), 367-371.
- Nguyễn Văn Khang, Lê Hoàng Mai (2024). Một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học giải bài tập chủ đề đại số tổ hợp - Toán 10. *Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Đồng Tháp*, 13(01S), 203-215.
- Nguyễn Văn Thuận, Nguyễn Hữu Hậu (2010). *Phát hiện và sửa chữa sai lầm cho học sinh trong dạy học Đại số - Giải tích ở trường phổ thông*. NXB Đại học Sư phạm.
- OECD (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing.
- Tulis, M., & Dresel, M. (2025). Effects on and consequences of responses to errors: Results from two experimental studies. *British Journal of Educational Psychology*, 95(1), 143-161. <https://doi.org/10.1111/bjep.12686>