

# ĐỀ XUẤT MỘT SỐ BIỆN PHÁP NHẪM PHÁT TRIỂN TƯ DUY HÌNH HỌC CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUA VẬN DỤNG MÔ HÌNH VAN HIELE

MEASURES TO DEVELOP GEOMETRIC THINKING FOR HIGH SCHOOL STUDENTS THROUGH  
THE APPLICATION OF THE VAN HIELE MODEL

Lư Kim Ngán,  
Đương Hữu Tông<sup>+</sup>

Đại học Cần Thơ  
+ Tác giả liên hệ • Email: dhtong@ctu.edu.vn

## Article history

Received: 09/01/2026

Accepted: 26/01/2026

Published: 20/4/2026

## Keywords

Geometric thinking levels,  
teaching Geometry, van  
Hiele model, five learning  
stages

## ABSTRACT

The development of students' geometric thinking is a central goal of mathematics education, essential for enhancing the effectiveness of geometry learning and fostering students' mathematical reasoning competence. The van Hiele model, a widely adopted framework in mathematics education, provides a hierarchical scale for assessing students' geometric thinking levels and an instructional guide for structuring geometry teaching. Based on theoretical studies and relevant research, this study proposes a set of pedagogical measures to advance high school students' geometric thinking by applying the Van Hiele model, thereby improving the efficiency of geometry teaching and learning. The proposed measures focus on three key aspects: designing instructional content based on rigorous hierarchy, organizing learning activities according to the five instructional phases of the van Hiele theory, and assessing geometric thinking using standardized tools. This research serves as a reference for mathematics teachers and educators concerned with related issues in geometry teaching.

## 1. Mở đầu

Các nội dung hình học có vị trí quan trọng trong Chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) môn Toán năm 2018, cung cấp các kiến thức và kỹ năng (ở mức độ suy luận logic), phương pháp đại số trong hình học, giúp phát triển trí tưởng tượng và tạo sự liên hệ với nhiều vấn đề thực tiễn (Bộ GD-ĐT, 2018). Tuy nhiên, nhiều nghiên cứu trước đây đã chỉ ra rằng việc dạy và học tập hình học của GV và HS bậc THPT gặp nhiều khó khăn do yêu cầu của môn học đối với khả năng trực quan hình học, phân tích, lập luận và giải quyết vấn đề thực tiễn của HS (Klemer và Rapoport, 2020; Ogundile và cộng sự, 2019). Đồng thời, việc đánh giá tư duy hình học (TDHH) thông thường qua các bài tập tính toán và chứng minh không thể phản ánh toàn diện các kỹ năng quan trọng khác như nhận biết, mô tả hay trực quan hóa đối tượng hình học (İbili và cộng sự, 2019). Do đó, nhiều nghiên cứu về đổi mới nội dung, phương pháp giảng dạy và đánh giá trong dạy học hình học đã được thực hiện, nhằm nâng cao hiệu quả dạy và học hình học, từ đó hình thành và phát triển khả năng TDHH của HS THPT.

Đối với khía cạnh nội dung và phương pháp giảng dạy hình học, các nghiên cứu cho rằng GV cần phải tổ chức tiến trình giảng dạy tuân theo các mức độ TDHH của HS, tạo điều kiện cho HS từng bước trải nghiệm, hình thành khái niệm, rèn luyện sử dụng các đối tượng hình học một cách chính xác, đồng thời liên hệ được những gì đang học với kinh nghiệm thực tiễn (van Hiele, 1999). Trong đó, một trong các tiếp cận dạy học phổ biến giúp theo dõi mức độ tiến bộ rõ ràng về TDHH của HS là tiếp cận dạy học theo mô hình các mức độ TDHH van Hiele (Arnal-Bailera và Manero, 2023). Hơn nữa, từ mô hình này, một số công cụ đánh giá các mức độ TDHH đã được phát triển và sử dụng rộng rãi trên thế giới như bài kiểm tra viết van Hiele Geometry Test (Usiskin, 1982) và bảng hỏi (Burger và Shaughnessy, 1986; Fuys và cộng sự, 1988), cho phép các nhà giáo dục đánh giá chính xác mức độ TDHH của HS, từ đó điều chỉnh nội dung và phương pháp giảng dạy. Như vậy, mô hình van Hiele có thể được vận dụng để nâng cao hiệu quả giảng dạy hình học và đánh giá kết quả học tập cũng như mức độ TDHH của HS. Tuy nhiên, chưa có một nghiên cứu nào tại Việt Nam có trọng tâm nghiên cứu về việc vận dụng mô hình van Hiele trong dạy học hình học nhằm phát triển TDHH cho HS THPT.

Từ cơ sở lí luận về các đặc điểm của TDHH và mô hình van Hiele và các đánh giá về khó khăn của GV và HS THPT trong dạy và học hình học, bằng phương pháp nghiên cứu tổng hợp và phân tích nội dung, nghiên cứu này đề xuất một số biện pháp vận dụng mô hình van Hiele trong giảng dạy hình học nhằm phát triển TDHH cho HS THPT.

## 2. Kết quả nghiên cứu

### 2.1. Tư duy hình học và mô hình các mức độ tư duy hình học van Hiele

Theo Antunović (2025), TDHH là một dạng tư duy toán học có đối tượng tư duy là các nội dung hình học. Do đó, TDHH được định nghĩa là quá trình nhận thức, phản ánh các thuộc tính bản chất, phát hiện ra những mối quan hệ bên trong có tính quy luật của các đối tượng hình học, thông qua ngôn ngữ và trên cơ sở thực hiện các thao tác tư duy như so sánh, phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, trừu tượng hóa, suy luận và chứng minh, nhằm hình thành khái niệm, phán đoán, suy luận,... và giải quyết vấn đề (Niss và Højgaard, 2019). Nhằm nâng cao hiệu quả phát triển TDHH cho HS trong dạy và học hình học, nhiều mô hình TDHH đã được nghiên cứu và phát triển như mô hình van Hiele về TDHH (van Hiele, 1986), lí thuyết khái niệm hình học (Fischbein, 1993), lí thuyết nhận thức hình học (Duval, 1995) và lí thuyết học tập hình học (Kuzniak, 2014). Trong phạm vi nghiên cứu này, các mức độ TDHH của HS được xem xét dựa trên mô hình các mức độ TDHH van Hiele và việc thiết kế nội dung giảng dạy và đánh giá TDHH của HS THPT được thực hiện trên cơ sở các giai đoạn học tập theo mô hình này.

Mô hình van Hiele (1986) phân cấp TDHH theo 05 mức độ riêng biệt, tương ứng với 05 giai đoạn học tập khi tổ chức giảng dạy hình học. Các nghiên cứu của van Hiele (1986), Clements và Battista (1992), Arnal-Bailera và Manero (2023) mô tả các mức độ này như sau: (1) Mức độ trực quan hóa - HS nhận biết, diễn tả các hình qua hình dạng và các đặc điểm trực quan; (2) Mức độ phân tích - HS có thể nhận biết, mô tả các hình qua tính chất của chúng, có thể phân tích các hình và hình thành khái niệm thông qua việc liên kết các tính chất; (3) Mức độ diễn dịch thông thường - HS có thể tiếp nhận và thông hiểu các định nghĩa chính xác, hiểu được mối quan hệ giữa các hình, có khả năng lập luận, hiểu được khái niệm bao hàm hình học, lập luận ở dạng “nếu...thì...”, chưa thể xây dựng các chứng minh; (4) Mức độ diễn dịch chính thức - HS có thể dựa vào lập luận và chứng minh để xác định tính đúng đắn của các khẳng định, đây là mức độ cần thiết phải đạt được đối với HS cấp THPT; (5) Mức độ chính xác hóa - Được xem là mức độ TDHH cao nhất, vì việc lập luận dẫn đến sự hình thành, đối chiếu các hệ thống tiên đề trong hình học.

Với mô hình này, Usiskin (1982), Fuys và cộng sự (1988) cho rằng các mức độ TDHH có các đặc điểm quan trọng gồm: (1) Tính tuần tự và phân cấp - HS phải đạt được mức độ thấp thì mới có thể tiến tới các mức độ cao hơn, theo đúng thứ tự của các mức độ; (2) Sự phụ thuộc vào giáo dục và gần như không phụ thuộc vào độ tuổi hay sự trưởng thành về mặt sinh học, cho rằng các hoạt động học tập thích hợp sẽ giúp HS có sự phát triển về mức độ TDHH; (3) Hệ thống ngôn ngữ và các liên hệ riêng biệt - Nếu GV sử dụng ngôn ngữ toán học cho mức độ tư duy cao hơn mức độ đạt được hiện tại của HS thì HS sẽ gặp khó khăn trong nhận thức và có thể hình thành các khái niệm sai lầm; (4) Tính phân biệt - Những HS ở các mức độ thấp hơn không thể hiểu hoặc theo kịp quá trình tư duy của HS ở mức độ cao hơn.

### 2.2. Tổ chức các giai đoạn học tập và đánh giá tư duy hình học của học sinh theo mô hình van Hiele

Xét về khía cạnh tổ chức giảng dạy, lí thuyết van Hiele nhấn mạnh rằng quá trình dạy học nên được tổ chức thành 05 giai đoạn học tập có tính chu trình và có thể lặp lại, tương ứng với 05 mức độ TDHH của HS, bao gồm: (1) Thông tin - GV giới thiệu nội dung học tập, HS làm quen với nội dung học tập; (2) Định hướng có hướng dẫn - GV hướng dẫn HS hoàn thành các hoạt động, HS quen thuộc với các ý tưởng; (3) Diễn giải - GV giải thích các khái niệm và chuẩn hóa ngôn ngữ hình học, HS nhận thức được các liên hệ ban đầu và bắt đầu phân tích trên cơ sở kiến thức đã có; (4) Định hướng tự do - GV đưa ra các hoạt động học tập để HS hoàn thành một cách độc lập, HS có thể lựa chọn các ý tưởng và tự định hướng khung liên hệ; (5) Tích hợp - HS có thể tóm tắt, tích hợp, phản ánh, mô tả và vận dụng những kiến thức đã được học (Nixon, 2002).

Về khía cạnh đánh giá, các hình thức đánh giá phổ biến bao gồm kiểm tra viết và khảo sát bằng bảng hỏi hoặc phỏng vấn. Để đánh giá một cách nhanh chóng và khách quan mức độ TDHH của HS dựa trên phân tích định lượng, nhiều nghiên cứu trước đây đã sử dụng bài kiểm tra van Hiele Geometry Test do Usiskin (1982) phát triển và cải tiến bởi Senk và cộng sự (2022). Bên cạnh đó, tiêu chí Guttman (Guttman Scalogram) cũng được sử dụng đồng thời với bài kiểm tra van Hiele Geometry Test (Salifu và cộng sự, 2020; Senk và cộng sự, 2022), cho phép kiểm tra tính phân cấp và tuần tự của sự phát triển TDHH ở HS và là căn cứ để đánh giá định lượng kết quả bài làm của HS. Bên cạnh đó, Burger và Shaughnessy (1986), Fuys và cộng sự (1988) xây dựng phương pháp đánh giá định tính thông qua quan sát, phỏng vấn và khảo sát bảng hỏi cho phép HS giải thích lí do đằng sau câu trả lời ở bài kiểm tra viết, nhằm tìm hiểu cấu trúc nhận thức và xác định mức độ tư duy của HS theo mô hình van Hiele.

### 2.3. Một số biện pháp phát triển tư duy hình học cho học sinh phổ thông qua vận dụng mô hình van Hiele

Trên cơ sở phân tích, tổng hợp và hệ thống hóa các nghiên cứu lí luận về TDHH, mô hình van Hiele, đặc điểm của các mức độ TDHH theo mô hình van Hiele, các công cụ đánh giá TDHH theo mô hình van Hiele và theo nguyên tắc đảm bảo sự phù hợp với mục tiêu, nội dung và phương pháp giáo dục được quy định trong Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 (Bộ GD-ĐT, 2018), nghiên cứu đề xuất một số biện pháp phát triển TDHH cho HS THPT thông qua vận dụng mô hình van Hiele. Các biện pháp được đề xuất nhằm vận dụng mô hình van Hiele trong thiết kế nội dung giảng dạy, tổ chức các giai đoạn học tập và đánh giá, theo định hướng phát triển TDHH của HS THPT.

#### 2.3.1. Thiết kế nội dung giảng dạy đảm bảo tính tuần tự và phân cấp của sự phát triển các mức độ tư duy hình học

a) Mục tiêu xây dựng biện pháp: Nhằm đảm bảo các nội dung giảng dạy, hoạt động học tập được thiết kế và sắp xếp theo trình tự phức tạp tăng dần từ trực quan, phân tích, diễn dịch đến chính xác hóa, giúp cho hoạt động tư duy của HS tiến bộ tuần tự và HS có thể sử dụng ngôn ngữ toán học chính xác, từ đó phát triển khả năng TDHH.

b) Nội dung của biện pháp: Biện pháp được vận dụng trong thiết kế nội dung bài giảng của GV. Các nội dung cần được thiết kế phù hợp với mức độ tư duy của số đông HS trên lớp, đồng thời được sắp xếp theo trình tự từ mức độ trực quan đến mức độ diễn dịch chính thức - tương đương với yêu cầu cần đạt về năng lực tư duy và lập luận toán học được đặt ra trong chương trình, cụ thể: (1) Các nội dung có tính trực quan, đòi hỏi HS nhận dạng, liệt kê đặc điểm hình dạng và phân loại dựa vào hình dạng → (2) Các nội dung đòi hỏi HS xác định tính chất của hình, phân tích và liệt kê các tính chất, phân loại dựa vào tính chất và kiểm chứng bằng ví dụ → (3) Các nội dung đòi hỏi HS sử dụng và hình thành định nghĩa, thiết lập được quan hệ bao hàm hình học và suy luận diễn dịch → (4) Các nội dung đòi hỏi HS thông hiểu và chứng minh các định nghĩa tương đương, chứng minh chính thức thông qua lập luận.

Ngoài ra, việc thiết kế nội dung giảng dạy cũng bao gồm việc GV cần nhắc sử dụng hệ thống ngôn ngữ toán học phù hợp trong từng nội dung giảng dạy tương ứng với mức độ tư duy cụ thể, thúc đẩy HS sử dụng ngôn ngữ toán học chính xác khi mô tả, phân tích các đối tượng hình học và trong khi lập luận. GV có thể: Xây dựng hệ thống ngôn ngữ toán học phù hợp cho HS thông qua việc thiết kế trước các câu hỏi gợi mở, các diễn giải và đảm bảo sử dụng thống nhất và chính xác ngôn ngữ toán học trong khi hình thành khái niệm, định lí, giải bài tập, ...; Thiết kế các hoạt động thúc đẩy HS diễn đạt toán học và sử dụng ngôn ngữ toán học thông qua vấn đáp, thảo luận, nhóm, báo cáo, thuyết trình, ...; Thường xuyên chỉnh sửa và chính xác hóa việc sử dụng ngôn ngữ toán học của HS; Sử dụng các từ khóa tương ứng với các mức độ tư duy trong mô hình van Hiele, ví dụ như phân biệt rõ ràng giữa ngôn ngữ mô tả trực quan (“giống như”, “có dạng”) với ngôn ngữ suy luận diễn dịch (“nếu... thì...”, “chứng minh rằng...”).

c) Ví dụ minh họa: Đối với nội dung dạy học khái niệm đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ở hình học lớp 11, GV có thể thiết kế các nội dung giảng dạy và nhiệm vụ học tập theo trình tự như sau: (1) Trực quan: Quan sát, phân biệt thông qua hình ảnh thực tế và mô hình đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; (2) Phân tích: Nhận xét về mối quan hệ của đường thẳng với các đường thẳng thuộc mặt phẳng; kiểm chứng bằng mô hình; (3) Diễn dịch thông thường: Nhắc lại về sự xác định của mặt phẳng qua hai đường thẳng cắt nhau; tạo liên hệ với các tính chất; phát biểu định nghĩa về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng bằng ngôn ngữ của HS; định nghĩa chính xác; (4) Diễn dịch chính thức: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

#### 2.3.2. Tổ chức tiến trình dạy học theo các giai đoạn học tập của mô hình van Hiele

a) Mục đích xây dựng biện pháp: Nhằm nâng cao hiệu quả giảng dạy hình học của GV và tạo điều kiện cho HS trải qua các hoạt động học tập có cấu trúc tuần tự, thúc đẩy sự tiến bộ lên các mức độ TDHH cao hơn của HS.

b) Nội dung của biện pháp: Biện pháp được vận dụng trong thiết kế tiến trình tiết học của GV. Theo đó, khi dạy học khái niệm, định lí, ... đối với một chủ đề học tập cụ thể, GV thiết kế cho HS học tập qua 05 giai đoạn học tập theo mô hình van Hiele với tiến trình dạy học như trong bảng 1.

Bảng 1. Tích hợp các giai đoạn học tập theo mô hình van Hiele

Giai đoạn	Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
Giai đoạn 1: Thông tin	Đặt các câu hỏi giúp HS gợi nhớ các thông tin có liên quan, gắn liền với thực tế; Trình bày các đối tượng mới cho HS quan sát, xác định, phân loại một cách trực quan; Đặt các câu hỏi gợi mở để xác định được định hướng và quan niệm của HS	Liên hệ kinh nghiệm trong thực tiễn; Khám phá ra mối liên hệ giữa đối tượng với kiến thức trực quan của mình và đặt câu hỏi; Làm quen với đối tượng và bắt đầu khám phá cấu trúc của đối tượng
Giai đoạn 2:	Tổ chức các hoạt động có hướng dẫn, giúp HS phân tích với các tính chất đối tượng hình học vừa khám phá được ở dạng trực quan; Dẫn dắt HS tiến	Khám phá tính chất và các mối liên hệ; Phác thảo sơ bộ về các mối liên hệ giữa các đối tượng, các tính chất của nhóm đối tượng

Định hướng có hướng dẫn	hành phân loại sơ bộ các đối tượng dựa trên tính chất của chúng	
Giai đoạn 3: Diễn giải	Nhấn mạnh các từ vựng sau khi HS đã quen thuộc với khái niệm; Cho HS phát biểu định nghĩa, định lý; Đưa ra định nghĩa, định lý chính xác; Dẫn dắt HS vận dụng định nghĩa, định lý được học vào giải quyết một số nhiệm vụ đơn giản	Quen với hệ thống kí hiệu và ngôn ngữ toán học có liên quan; Sử dụng hệ thống kí hiệu và ngôn ngữ toán học để phát biểu định nghĩa, định lý; Tiếp nhận định nghĩa, định lý với hệ thống các kí hiệu và ngôn ngữ toán học chính xác; Vận dụng định nghĩa, định lý được học vào giải quyết một số nhiệm vụ đơn giản
Giai đoạn 4: Định hướng tự do	Đưa ra các hoạt động yêu cầu chứng minh tính đúng/sai bằng cách sử dụng các định nghĩa và tính chất đã học (diễn dịch thông thường); lập luận và tự xây dựng các chứng minh hoặc tìm lỗi sai trong các chứng minh (diễn dịch chính thức)	Thực hiện các nhiệm vụ phức tạp hơn; Tự định hướng các liên hệ
Giai đoạn 5: Tích hợp	Cung cấp cho HS tổng quan những gì đã học	Tóm tắt những gì các em được học; Kết luận và củng cố hoặc điều chỉnh các phương án giải toán

c) *Ví dụ minh họa*: Sau đây là một ví dụ minh họa về việc vận dụng 05 giai đoạn học tập theo mô hình van Hiele trong thiết kế bài giảng, xem bảng 2.

*Bảng 2. Hình thành khái niệm Vector chỉ phương của đường thẳng*

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
Giai đoạn 1: (1) GV cho HS quan sát hình ảnh các vectơ và một đường thẳng cho trước; (2) GV yêu cầu HS phân nhóm những vectơ cùng loại và giải thích cơ sở phân chia	(1) HS quan sát hình ảnh; (2) HS tiến hành phân nhóm các vectơ và giải thích cơ sở phân chia
Giai đoạn 2: (1) GV nhận xét - Trong trường hợp HS chưa phân loại phù hợp, GV gợi ý cho HS thực hiện: “Đặc điểm về độ dài của các vectơ, đặc điểm về phương của vectơ so với đường thẳng”; (2) GV yêu cầu HS nhận xét về đặc điểm chung của các vectơ ở mỗi nhóm: Về độ lớn, phương	(1) HS đối chiếu các ý tưởng; (2) HS phân tích
Giai đoạn 3: (1) GV yêu cầu HS phát biểu định nghĩa; (2) GV đưa ra định nghĩa vectơ chỉ phương của đường thẳng; (3) GV yêu cầu HS nhắc lại định nghĩa	(1) HS phát biểu định nghĩa; (2) HS lắng nghe, ghi chép; (3) HS nhắc lại định nghĩa
Giai đoạn 4: (1) GV đưa ra ví dụ 1 - Vẽ một số vectơ chỉ phương của đường thẳng và cho biết tọa độ của các vectơ đó; (2) GV nhắc lại về tính chất của vectơ chỉ phương, yêu cầu HS nhận xét về số lượng vectơ chỉ phương của một đường thẳng và mối quan hệ giữa các vectơ, GV đưa ra nhận xét; (3) GV yêu cầu HS vẽ đường thẳng đi qua một điểm và có vectơ chỉ phương cho trước; (4) GV đặt câu hỏi: Có thể vẽ được bao nhiêu đường thẳng như vậy?; Vì sao? Giai đoạn 5: (1) GV yêu cầu HS tổng kết về khái niệm bằng lời hoặc thông qua sơ đồ tư duy; (2) GV chính xác hóa hệ thống ngôn ngữ và kí hiệu mà HS sử dụng và tổng kết về khái niệm	(1) HS thực hiện, khám phá; (2) HS nhận xét; (3) HS thực hiện, khám phá; (4) HS thảo luận, lập luận và phát biểu  (1) HS tổng kết, dùng sơ đồ để hệ thống hóa kiến thức; (2) HS lắng nghe, ghi nhớ

### 2.3.3. Sử dụng đa dạng và thường xuyên các công cụ trong đánh giá tư duy hình học của học sinh

a) Mục đích xây dựng biện pháp: Nhằm đảm bảo đánh giá chính xác mức độ TDHH của HS, từ đó đánh giá hiệu quả giảng dạy hoặc các can thiệp sư phạm của GV. Đây là cơ sở để GV và các nhà giáo dục nghiên cứu, điều chỉnh và triển khai các biện pháp sư phạm phù hợp và kịp thời nhằm nâng cao hiệu quả phát triển TDHH cho HS.

b) Nội dung của biện pháp: Biện pháp được vận dụng trong thiết kế kiểm tra đánh giá HS, bao gồm cả đánh giá thường xuyên và định kì. Theo đó, GV cần sử dụng đa dạng các công cụ đánh giá để có thể tối ưu hiệu quả đánh giá và đảm bảo đánh giá chính xác mức độ tư duy đạt được của HS, cụ thể: (1) Lên kế hoạch kiểm tra, đánh giá thường xuyên, định kì, trước và sau khi tiến hành can thiệp sư phạm hoặc trước và sau khi học một chương...; (2) Nghiên cứu và lựa chọn các công cụ đánh giá phù hợp để GV có thể sử dụng trong thực hành giảng dạy; (3) Kết hợp giữa



chủ yếu dựa trên phân tích và tổng hợp nội dung và chưa dựa trên các cơ sở thực tiễn về tình hình dạy học phát triển TDHH của GV và thực trạng mức độ phát triển TDHH của HS THPT. Trên cơ sở các hạn chế đã chỉ ra, bài báo đề xuất một số hướng nghiên cứu mới trong tương lai gồm: (1) Tiến hành các nghiên cứu thực nghiệm nhằm kiểm chứng hiệu quả của các biện pháp đã được đề xuất trong phát triển TDHH cho HS và tính khả thi khi vận dụng trong giảng dạy môn Toán ở các trường THPT; (2) Khảo sát tình hình dạy học phát triển TDHH của GV tại một số trường THPT và đánh giá thực trạng mức độ TDHH của HS, từ đó xác định những khó khăn của GV và thiết kế các biện pháp sư phạm phù hợp, đáp ứng nhu cầu thực tế của GV và HS THPT.

#### Tài liệu tham khảo

- Antunović, B. (2025). Applying Duval's teaching sequence to 7th-grade geometry: A case study on the area of a disc. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14), TWG04: Geometry Teaching and Learning*. <https://hal.science/hal-05199523>
- Arnal-Bailera, A., & Manero, V. (2023). A characterization of van Hiele's level 5 of geometric reasoning using the Delphi methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22(3), 537-560. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10380-z>
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48. <https://doi.org/10.2307/749317>
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:208102237>
- Duval, R. (1995). *Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117707924>
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph, 3, i. <https://doi.org/10.2307/749957>
- İbili, E., Çat, M., Resnyansky, D., Şahin, S., & Billinghamurst, M. (2019). An assessment of geometry teaching supported with augmented reality teaching materials to enhance students' 3D geometry thinking skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(2), 224-246.
- Klemer, A., & Rapoport, S. (2020). Origami and GeoGebra activities contribute to geometric thinking in second graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(11), em1894. <https://doi.org/10.29333/ejmste/8537>
- Kuzniak, A. (2014). Understanding geometric work through its development and its transformations. In *Transformation-A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 311-325). New York, NY: Springer New York.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Nixon, E. G. (2002). *An investigation of the influence of visualisation, exploring patterns and generalisation on thinking levels in the formation of the concepts of sequences and series*. University of South Africa.
- Ogundile, O. P., Bishop, S. A., Okagbue, H. I., Ogunniyi, P. O., & Olanrewaju, A. M. (2019). Factors influencing ICT adoption in some selected secondary schools in Ogun State, Nigeria. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 14(10), 62-74. <https://doi.org/10.3991/ijet.v14i10.10095>
- Salifu, A. S., Yakubu, A. R., Ibrahim, F. I., & Amidu, B. (2020). Van Hiele's geometric thinking levels and achievement differences of pre-service teachers' and in-service teachers' in Ghana. *International Journal of Innovative Research and Advanced Studies*, 7(1), 128-136.
- Senk, S. L., Thompson, D. R., Chen, Y.-H., Voogt, K., & Usiskin, Z. (2022). *The van Hiele Geometry Test: History, use, and suggestions for revisions*. University of Chicago School Mathematics Project.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project). University of Chicago.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press Inc.
- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316. <https://doi.org/10.5951/tcm.5.6.03>