

DAY HỌC THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG THEO HƯỚNG PHÁT TRIỂN TƯ DUY XÁC SUẤT - ĐỀ XUẤT MỘT KHUNG LÝ THUYẾT

TEACHING STATISTICS AND PROBABILITY IN HIGH SCHOOL TOWARDS DEVELOPING PROBABILISTIC
THINKING: A PROPOSED THEORETICAL FRAMEWORK

Lê Tuấn Anh¹,
Nguyễn Văn Tiên^{2,3,+}

¹Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
²Nghiên cứu sinh K45, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
³Đại học Trà Vinh
+Tác giả liên hệ • Email: ngvtien@tvu.edu.vn

Article history

Received: 27/01/2026

Accepted: 12/03/2026

Published: 29/4/2026

Keywords

Probabilistic thinking,
teaching Statistics and
Probability, theoretical
framework, high school,
curriculum analysis,
Mathematics Education

ABSTRACT

Statistics and Probability is one of the three core knowledge strands in Vietnam's 2018 General Education Mathematics Curriculum, playing a vital role in developing students' mathematical thinking and reasoning competencies. However, current instructional practices in high schools remain predominantly focused on computational skills and formulaic application. Conversely, activities designed to help students grasp the nature of randomness, analyze data, and make decisions under uncertainty have not yet received commensurate attention. This study employs a theoretical research approach combined with curriculum analysis by synthesizing the 2018 Mathematics Curriculum with Piaget's theory of cognitive development, Fischbein's theory of probabilistic intuitions, and the frameworks of Jones et al. and Tarr & Jones to propose a theoretical framework for developing probabilistic thinking in upper secondary students. This framework comprises six core structures across four levels of thinking, ranging from subjective to formal quantitative reasoning. It contributes a theoretical basis for designing assessment tools and providing pedagogical orientations for Statistics and Probability, thereby bridging the gap between the 2018 Curriculum's requirements and contemporary classroom practices.

1. Mở đầu

Trong Chương trình giáo dục phổ thông (CTGDPT) môn Toán 2018, Thống kê và Xác suất đã được xác định là một trong ba mạch kiến thức cốt lõi, xuyên suốt từ lớp 2 đến lớp 12. Vai trò của mạch kiến thức này không chỉ dừng lại ở việc cung cấp tri thức toán học mà còn nhằm hình thành và phát triển các năng lực toán học cho HS theo định hướng phát triển năng lực của CTGDPT 2018 (Bộ GD-ĐT, 2018a), đặc biệt là năng lực tư duy và lập luận toán học. Trong bối cảnh các tình huống ngày càng mang tính bất định và phụ thuộc vào dữ liệu, việc trang bị cho HS khả năng nhận diện, phân tích và đưa ra quyết định trong điều kiện không chắc chắn được xem là một yêu cầu thiết yếu của giáo dục hiện đại (Batanero và Sanchez, 2005; Gal, 2005). Tuy nhiên, thực tiễn dạy học xác suất tại các trường THPT hiện nay vẫn bộc lộ những hạn chế nhất định. Nhiều nghiên cứu cho thấy quá trình dạy học xác suất còn gặp những thách thức, đặc biệt trong việc giúp HS hiểu bản chất của sự ngẫu nhiên và vận dụng xác suất trong các tình huống ra quyết định (Batanero và cộng sự, 2016; Moore, 1990). Điều này dẫn đến sự hạn chế trong việc phát triển tư duy xác suất (TDXS) - một cấu trúc nhận thức đặc thù cho phép HS mô hình hóa và lí giải các hiện tượng ngẫu nhiên, từ đó đưa ra các quyết định hợp lí trong điều kiện không chắc chắn.

Nghiên cứu về TDXS trên thế giới đã trải qua một tiến trình phát triển lâu dài. Khởi đầu từ những công trình của Piaget và Inhelder (1975) về sự phát triển nhận thức, cùng với lí thuyết về trực giác xác suất của Fischbein (1975), các nghiên cứu sau đó đã chuyển dần sang xây dựng các khung lí thuyết mô tả cấu trúc và cấp độ phát triển TDXS. Tiêu biểu là khung lí thuyết của Jones và cộng sự (1997, 1999), trong đó TDXS được phân tích theo các cấu trúc như xác suất của một sự kiện, so sánh xác suất và xác suất có điều kiện. Tiếp nối hướng nghiên cứu này, Tarr và Jones (1997) đã mở rộng khung lí thuyết cho cấp THCS, nhấn mạnh các cấu trúc như tính độc lập và xác suất có điều kiện. Các nghiên cứu gần đây (Kazak và Leavy, 2018; Kurt, 2023) tiếp tục làm rõ vai trò của chu trình dự đoán - thực

nghiệm và mô phỏng công nghệ trong việc giúp HS điều chỉnh các đánh giá chủ quan và phát triển suy luận xác suất dựa trên dữ liệu. Tại Việt Nam, mặc dù định hướng phát triển năng lực trong CTGDPT 2018 đã được xác lập rõ ràng (Bộ GD-ĐT, 2018a), việc nghiên cứu TDXS trong dạy học Thống kê và xác suất ở cấp THPT vẫn còn hạn chế. Các nghiên cứu hiện có chủ yếu tập trung vào nội dung giảng dạy hoặc phát triển tư duy Thống kê, trong khi TDXS chưa được xem xét như một cấu trúc nhận thức độc lập với các thành tố và cấp độ phát triển rõ ràng trong bối cảnh HS THPT. Đồng thời, các khung lý thuyết quốc tế hiện có phần lớn được xây dựng cho các cấp học thấp hơn, chưa phản ánh đầy đủ đặc trưng nhận thức của HS khi tiếp cận nội dung xác suất có mức độ suy luận cao hơn như xác suất có điều kiện, công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.

Xuất phát từ những vấn đề trên, bài báo này đề xuất một khung lý thuyết phát triển TDXS cho HS THPT Việt Nam. Nghiên cứu tập trung trả lời câu hỏi: (1) TDXS của HS THPT gồm những cấu trúc nào? (2) Các cấp độ phát triển của tư duy này được biểu hiện ra sao? Khung lý thuyết được xây dựng trên cơ sở kế thừa các mô hình quốc tế, đồng thời điều chỉnh và mở rộng các cấu trúc nội dung phù hợp với CTGDPT môn Toán 2018, qua đó cung cấp cơ sở khoa học cho việc thiết kế dạy học và đánh giá sự phát triển TDXS của HS trong bối cảnh thực tiễn giáo dục phổ thông hiện nay.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu sử dụng phương pháp nghiên cứu lý luận kết hợp với phân tích chương trình nhằm xây dựng khung lý thuyết phát triển TDXS cho HS THPT theo hướng cấu trúc nhận thức và tiến trình phát triển. Nghiên cứu mang tính chất lý luận, chưa bao gồm kiểm chứng thực nghiệm. Phương pháp phân tích - tổng hợp tài liệu được sử dụng để hệ thống hóa và lựa chọn các lý thuyết nền về TDXS (Fischbein, 1975; Jones và cộng sự, 1997, 1999; Piaget và Inhelder, 1975; Tarr và Jones, 1997). Đồng thời, phương pháp phân tích chương trình được sử dụng để đối chiếu các yêu cầu cần đạt của CTGDPT môn Toán 2018 với các thành tố của TDXS.

Trên cơ sở đó, khung lý thuyết được xây dựng theo hai chiều: (1) xác định các cấu trúc cốt lõi của TDXS như các cấu trúc nhận thức; (2) phân chia các cấp độ phát triển từ lập luận mang tính chủ quan đến lập luận định lượng hình thức. Quy trình xây dựng gồm ba bước: xác định các thành tố nhận thức cốt lõi từ các khung lý thuyết; đối chiếu với CTGDPT 2018 để lựa chọn và điều chỉnh các cấu trúc; xây dựng ma trận mô tả các cấp độ dựa trên mức độ huy động trực giác, công cụ biểu diễn và lập luận xác suất như các tiêu chí phân hóa cấp độ tư duy. Các cấu trúc và cấp độ được xác định dựa trên tính kế thừa nghiên cứu trước; sự phù hợp với đặc điểm nhận thức của HS THPT; khả năng chuyển hóa thành các biểu hiện có thể quan sát và đánh giá trong dạy học.

2.2. Khái niệm cơ bản

2.2.1. Khái niệm “tư duy”

Theo Hoàng Phê và cộng sự (2003), “tư duy” là giai đoạn cao của quá trình nhận thức, đi sâu vào bản chất và phát hiện ra tính quy luật của sự vật thông qua các hình thức như biểu tượng, khái niệm, phán đoán và suy lý. Theo Moseley và cộng sự (2005), tư duy được mô tả là một quá trình có mục tiêu rõ ràng, bao gồm các hoạt động trí tuệ như ghi nhớ, hình thành khái niệm, lập kế hoạch cho hành động hoặc lời nói, lập luận, giải quyết vấn đề, xem xét ý kiến, đưa ra quyết định và phán đoán, cũng như sáng tạo và hình thành những góc nhìn mới. Tương tự, Holyoak và Morrison (2012) cho rằng tư duy là sự biến đổi có hệ thống những hình ảnh và khái niệm trong tâm trí nhằm mô tả trạng thái thực tế hoặc tiềm năng của thế giới, phục vụ cho các mục tiêu cụ thể.

Điểm chung của các quan điểm trên là đều xem tư duy như một quá trình xử lý thông tin có mục tiêu, gắn với hoạt động giải quyết vấn đề và ra quyết định. Trong bối cảnh toán học, đặc biệt là các tình huống mang tính bất định, tư duy không chỉ dừng lại ở việc suy luận logic mà còn bao hàm việc đánh giá khả năng xảy ra và lựa chọn phương án hành động phù hợp. Từ các quan điểm trên, chúng tôi quan niệm tư duy là quá trình nhận thức bậc cao mang tính mục đích, trong đó chủ thể huy động và xử lý thông tin thông qua các thao tác trí tuệ nhằm giải quyết vấn đề, đưa ra quyết định và sáng tạo các giá trị mới.

2.2.2. Khái niệm “tư duy xác suất”

Khái niệm TDXS được tiếp cận từ nhiều góc nhìn khác nhau, phản ánh cách con người nhận thức, lý giải và hành động trong các tình huống bất định. Dưới góc độ tâm lý học, Fischbein (1975) cho rằng TDXS gồm hai thành phần trực giác ngẫu nhiên và lập luận xác suất hình thức. Trong đó, trực giác đóng vai trò định hướng ban đầu nhưng cần được điều chỉnh thông qua giáo dục để tránh các sai lệch nhận thức. Ở góc độ nhận thức, Johnson-Laird (1994) xem TDXS như một năng lực tự nhiên giúp con người lý giải thế giới trong điều kiện không chắc chắn. Trên cơ sở đó, Jones và cộng sự (1999) khẳng định mọi hình thức suy nghĩ về xác suất, kể cả mang tính chủ quan, đều là biểu hiện của sự phát triển TDXS; trong khi Shodiqin và cộng sự (2021) nhấn mạnh vai trò của TDXS trong việc ra quyết định

dựa trên khả năng xảy ra của các sự kiện. Các quan điểm trên cho thấy TDXS có thể được tiếp cận như một quá trình nhận thức tích hợp, trong đó trực giác đóng vai trò khởi phát các phán đoán ban đầu, còn lập luận xác suất giữ vai trò kiểm chứng và điều chỉnh. Sự phát triển của TDXS gắn liền với quá trình chuyển từ các đánh giá cảm tính sang các suy luận có cơ sở định lượng.

Trong nghiên cứu này, TDXS được hiểu là một quá trình nhận thức bậc cao, trong đó chủ thể huy động trực giác, kiến thức và các thao tác lập luận để nhận diện, lí giải, mô hình hóa và đưa ra quyết định trong các tình huống bất định; đồng thời được biểu hiện thông qua các dạng suy luận và lập luận xác suất trong hoạt động học tập.

2.3. Cấu trúc và cấp độ phát triển tư duy xác suất

2.3.1. Cơ sở xác định các cấu trúc tư duy xác suất

Việc xác định các cấu trúc thành phần của TDXS cho HS THPT trong nghiên cứu này là không chỉ dựa trên mạch kiến thức toán học thuần túy mà còn là sự tích hợp có chọn lọc giữa các khung lí thuyết nhận thức quốc tế và thực tiễn CTGDPT 2018 của Việt Nam. Sáu cấu trúc được lựa chọn bao gồm: Không gian mẫu; Xác suất của biến cố; So sánh xác suất; Tính độc lập; Xác suất có điều kiện; Xác suất toàn phần gắn với công thức Bayes. Các cấu trúc này không đơn thuần là các nội dung kiến thức toán học, mà được hiểu như các cấu trúc nhận thức phản ánh cách HS tổ chức, xử lí và liên kết thông tin trong các tình huống ngẫu nhiên. Mỗi cấu trúc tương ứng với một dạng hoạt động nhận thức đặc trưng của TDXS. Cơ sở cho lựa chọn này được luận giải qua ba khía cạnh chính:

Tính kế thừa và phát triển liên tục từ các khung lí thuyết quốc tế: Nghiên cứu thiết lập một lộ trình phát triển TDXS xuyên suốt các cấp học. Chúng tôi kế thừa 4 cấu trúc nền tảng từ khung lí thuyết của Jones và cộng sự (1997, 1999) vốn được thiết kế cho cấp tiểu học. Tiếp đó, cấu trúc “Tính độc lập” dựa trên hướng tiếp cận của Tarr và Jones (1997) dành cho cấp THCS là cơ sở quan trọng để phản ánh khả năng nhận diện tính độc lập giữa các biến cố. Đặc biệt, nghiên cứu này đề xuất cấu trúc thứ sáu về “Xác suất toàn phần gắn với công thức Bayes” như một sự mở rộng dành riêng cho lứa tuổi THPT. Cấu trúc này không chỉ bám sát CTGDPT 2018 mà còn phản ánh mức độ nhận thức cao nhất trong tiến trình suy luận xác suất: khả năng cập nhật và điều chỉnh niềm tin dựa trên dữ liệu mới.

Sự tương thích với tâm lí học nhận thức: Theo Piaget và Inhelder (1975), HS THPT đã hoàn thiện giai đoạn “Vận động hình thức”, có khả năng suy luận trên các giả thuyết và thực hiện các phép toán tổ hợp phức tạp (như việc phối hợp các quy tắc đếm để xác định cấu trúc không gian mẫu). Sáu cấu trúc này cho phép khai thác tính đa năng lực tư duy của HS. Đồng thời, dựa trên lí thuyết của Fischbein (1975), việc xác định các cấu trúc này nhằm hướng tới việc hình thành “trực giác thứ cấp”. Đây là loại trực giác không tự nhiên có sẵn mà được hình thành qua quá trình giáo dục có hệ thống, giúp HS vận dụng thành thạo các quy tắc toán học để đưa ra quyết định hợp lí trong các tình huống bất định một cách tự nhiên và tự tin.

Bám sát yêu cầu cần đạt của CTGDPT 2018: Sáu cấu trúc này đã bao phủ toàn diện mạch kiến thức xác suất trong CTGDPT môn Toán 2018, trải dài từ xác suất cổ điển ở lớp 10; các quy tắc cộng, nhân và khái niệm biến cố độc lập ở lớp 11; cho đến xác suất có điều kiện, xác suất toàn phần và công thức Bayes ở lớp 12. Việc lựa chọn các thành tố gắn kết chặt chẽ với chương trình không chỉ khẳng định giá trị học thuật của khung lí thuyết mà còn đảm bảo tính ứng dụng cao trong việc xây dựng công cụ đánh giá năng lực cho HS THPT hiện nay.

Trên cơ sở đó, sáu cấu trúc được xem là các thành tố cốt lõi của TDXS trong phạm vi nghiên cứu này, đồng thời không loại trừ khả năng tồn tại các cấu trúc khác trong những bối cảnh nghiên cứu hoặc mục tiêu dạy học cụ thể.

2.3.2. Các cấp độ phát triển tư duy xác suất

Dựa trên sự tổng hợp các khung lí thuyết về mức độ nhận thức của Jones và cộng sự (1997, 1999), Tarr và Jones (1997), nghiên cứu này phân định sự phát triển TDXS của HS THPT qua bốn cấp độ. Tiến trình này phản ánh sự chuyển hóa từ các phán đoán mang tính trực giác sang các suy luận có cơ sở định lượng và hình thức, giúp HS dần kiểm soát được sự không chắc chắn bằng các mô hình toán học.

Cấp độ 1 (Chủ quan): đây là giai đoạn tư duy bị chi phối mạnh mẽ bởi “trực giác sơ cấp” - những phán đoán mang tính bản năng, hình thành tự nhiên từ kinh nghiệm sống giúp con người phản ứng nhanh nhưng dễ dẫn đến sai lầm về mặt logic (Fischbein, 1975). Ở cấp độ này, HS thường đưa ra phán đoán dựa trên niềm tin cá nhân, cảm xúc hoặc các yếu tố phi xác suất (như sự yêu thích, vận may). Trong các tình huống ngẫu nhiên, HS có xu hướng coi các biến cố là kết quả của các tác động định mệnh hoặc chủ quan thay vì quy luật khách quan. Lập luận của HS ở giai đoạn này thường thiếu nhất quán, các em dễ bị chi phối bởi các yếu tố bên ngoài hoặc kinh nghiệm cá nhân hơn là các quy luật xác suất khách quan.

Cấp độ 2 (Chuyển tiếp): HS bắt đầu nhận ra sự tồn tại của các quy luật toán học nhưng tư duy còn mang tính rời rạc. Theo Piaget và Inhelder (1975), đây là giai đoạn trung gian giữa thao tác cụ thể và thao tác hình thức. HS đã có

khả năng liệt kê được một phần không gian mẫu hoặc nhận diện được biến cố có khả năng xảy ra cao hơn, nhưng chưa ổn định trong việc lượng hóa xác suất. Các em bắt đầu nhận diện được sự không tương tác giữa các biến cố ở các phép thử đơn giản nhưng dễ dàng bị dao động khi bối cảnh thay đổi phức tạp.

Cấp độ 3 (Định lượng không chính thức): ở cấp độ này, HS đã hình thành được các chiến lược mang tính hệ thống hơn. Các em bắt đầu sử dụng các công cụ trực quan như sơ đồ hình cây, bảng số liệu hoặc các phương pháp đếm để lượng hóa khả năng xảy ra của biến cố. Tuy nhiên, lập luận vẫn dựa nhiều vào các kinh nghiệm cụ thể hoặc các tỉ số đơn giản. Mặc dù đã vượt qua được hầu hết các thiên kiến chủ quan, HS ở cấp độ này vẫn gặp khó khăn trong việc khái quát hóa các quy luật thành các công thức tổng quát trong những tình huống đòi hỏi tư duy tổ hợp bậc cao.

Cấp độ 4 (Định lượng chính thức) - cấp độ phát triển cao nhất, tương ứng với giai đoạn hoàn thiện tư duy hình thức của Piaget. HS không chỉ vận hành thành thạo các thuật toán (quy tắc cộng, nhân, tổ hợp) mà còn hiểu rõ bản chất logic đằng sau chúng. Ở cấp độ này, “trực giác thứ cấp” (Fischbein, 1975) được hình thành rõ nét: HS có thể lập luận chính xác về tính độc lập, thiết lập được mối liên hệ giữa các biến cố trong hệ thống phức tạp và đặc biệt là xác định và điều chỉnh xác suất khi có thêm thông tin thông qua suy luận theo công thức Bayes. HS có khả năng chuyển đổi linh hoạt giữa các biểu diễn toán học và giải thích được ý nghĩa của các con số xác suất trong thực tiễn.

Sự phân bậc này cho thấy lứa tuổi THPT là giai đoạn bản lề để HS thoát li hoàn toàn khỏi cấp độ 1 và 2, hướng tới sự làm chủ ở cấp độ 4. Việc đạt tới cấp độ “Định lượng chính thức” đối với các cấu trúc hiện đại như xác suất toàn phần gắn với công thức Bayes chính là minh chứng cho sự trưởng thành về năng lực mô hình hóa và tư duy phân biện của HS trước những vấn đề bất định trong cuộc sống. Các cấp độ trên được phân biệt dựa trên mức độ huy động ba thành tố: (2) trực giác và kinh nghiệm; (2) công cụ biểu diễn; (3) lập luận định lượng. Sự khác biệt giữa các cấp độ không chỉ nằm ở mức độ sử dụng công cụ mà còn ở khả năng kiểm soát lập luận xác suất, từ các phán đoán cảm tính đến các suy luận có cơ sở định lượng và logic chặt chẽ. Sự chuyển dịch từ cấp độ 2 sang cấp độ 3 được đặc trưng bởi việc chuyển từ nhận biết trực quan sang sử dụng các biểu diễn có cấu trúc như sơ đồ cây hoặc bảng dữ liệu. Cần lưu ý rằng, sự phát triển TDXS không hoàn toàn tuyến tính; HS có thể biểu hiện ở các cấp độ khác nhau tùy theo từng cấu trúc nội dung và bối cảnh nhiệm vụ. Các cấp độ này được vận dụng trên từng cấu trúc TDXS, qua đó hình thành một khung hai chiều cho phép mô tả sự phát triển TDXS của HS một cách hệ thống.

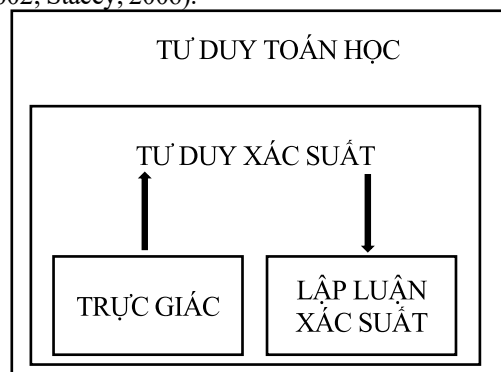
2.4. Mối quan hệ giữa tư duy toán học, lập luận xác suất và tư duy xác suất

Tư duy toán học là phạm trù nhận thức rộng, bao gồm nhiều hình thức tư duy đặc thù gắn với các lĩnh vực khác nhau của toán học. Về bản chất, tư duy toán học cung cấp hệ thống các thao tác nhận thức nền tảng như phân tích, so sánh, khái quát hóa, trừu tượng hóa và mô hình hóa để người học có thể hình thành tri thức (Breen và O'Shea, 2010; Mason và cộng sự, 2010). Tuy nhiên, tư duy toán học truyền thống thường xử lý các đối tượng trong bối cảnh tất định, nơi các kết quả là duy nhất và chính xác tuyệt đối (Tall, 2002; Stacey, 2006).

TDXS kế thừa các thao tác của tư duy toán học nhưng vận hành trong bối cảnh bất định. TDXS bao hàm quá trình huy động trực giác, lập luận và ra quyết định để nhận diện, lí giải và mô hình hóa các tình huống ngẫu nhiên (Taram và Setyawan, 2022). Trong khi trực giác trong tư duy toán học chỉ đóng vai trò định hướng ban đầu thì trong TDXS, trực giác (đặc biệt là trực giác sơ cấp) có ảnh hưởng mạnh mẽ đến quá trình nhận thức, đôi khi dẫn đến các thiên kiến cần được điều chỉnh thông qua giáo dục (Sari và cộng sự, 2024). Như vậy, TDXS có thể được hiểu là quá trình huy động trực giác và tri thức để nhận diện, mô hình hóa các tình huống mang tính ngẫu nhiên.

Lập luận xác suất được xem là thành phần hình thức và là sự biểu hiện cụ thể của TDXS ra bên ngoài. Nếu TDXS là nền tảng nhận thức bên trong thì lập luận xác suất là công cụ để biện minh, chứng minh và diễn đạt các suy nghĩ đó thông qua việc vận dụng các quy tắc, kí hiệu và mô hình toán học (như sơ đồ hình cây, bảng dữ liệu,...) để xử lý sự không chắc chắn. Lập luận xác suất giúp người học chuyển từ những phán đoán cảm tính sang các kết luận có tính định lượng và logic (Batanero và cộng sự, 2016; Fischbein, 1975; Jones và cộng sự, 1997, 1999). Nói cách khác, lập luận xác suất phản ánh mức độ phát triển của TDXS thông qua các hành vi có thể quan sát được.

Về cơ chế nhận thức, trực giác đóng vai trò hình thành các phán đoán ban đầu về các tình huống ngẫu nhiên, trong khi lập luận xác suất giúp người học kiểm tra, điều chỉnh và phát triển các phán đoán đó thông qua các công



Hình 1. Mối quan hệ giữa tư duy toán học, lập luận xác suất và TDXS

cụ toán học. Theo Fischbein (1975), các trực giác này thường xuất hiện như những phán đoán hoặc dự đoán ban đầu, được hình thành trước khi người học thực hiện các bước lập luận một cách tường minh.

Do đó, TDXS có phạm vi rộng hơn lập luận xác suất vì nó không chỉ bao gồm các quy tắc logic hình thức mà còn tích hợp cả yếu tố trực giác và kinh nghiệm đời sống. TDXS đóng vai trò cầu nối giữa tư duy toán học thuần túy (với tính chặt chẽ, logic) và các tình huống thực tiễn chứa đựng sự không chắc chắn, giúp con người đưa ra những quyết định hợp lý dựa trên sự lượng hóa khả năng xảy ra của các sự kiện (Pfannkuch và cộng sự, 2016).

2.5. Cơ sở chương trình giáo dục phổ thông môn Toán 2018 cho việc phát triển tư duy xác suất

2.5.1. Mục tiêu mạch kiến thức Thống kê và Xác suất ở trung học phổ thông

Mục tiêu dạy học mạch kiến thức Thống kê và xác suất ở trường THPT nhằm giúp HS hoàn thiện khả năng thu thập, phân loại, biểu diễn, phân tích và xử lý dữ liệu Thống kê; sử dụng các công cụ phân tích dữ liệu Thống kê thông qua các số đặc trưng đo xu thế trung tâm và đo mức độ phân tán; sử dụng các quy luật Thống kê trong thực tiễn; nhận biết các mô hình ngẫu nhiên, các khái niệm cơ bản của xác suất và ý nghĩa của xác suất trong thực tiễn (Bộ GD-ĐT, 2018b). Từ góc độ nghiên cứu giáo dục toán học, các mục tiêu và nội dung trên tạo cơ sở thuận lợi cho việc hình thành và phát triển TDXS ở HS, thể hiện qua khả năng nhận diện các tình huống ngẫu nhiên, phân tích mối quan hệ giữa các sự kiện và diễn giải thông tin Thống kê trong những bối cảnh có yếu tố không chắc chắn. Cơ sở chương trình này được cụ thể hóa thông qua việc tổ chức nội dung mạch kiến thức Thống kê và xác suất theo tiến trình từ lớp 10 đến lớp 12, với mức độ phức tạp tăng dần của các khái niệm và mối quan hệ xác suất.

Các yêu cầu cần đạt như mô tả không gian mẫu, so sánh khả năng xảy ra của biến cố, giải thích ý nghĩa của xác suất có điều kiện hay vận dụng công thức Bayes trong bối cảnh thực tiễn không chỉ yêu cầu HS thực hiện tính toán mà còn đòi hỏi khả năng suy luận, mô hình hóa và ra quyết định trong điều kiện bất định.

2.5.2. Mối liên hệ giữa nội dung chương trình và 6 cấu trúc tư duy xác suất

Trên cơ sở tiến trình tổ chức nội dung nêu trên, có thể phân tích mối liên hệ giữa các nội dung dạy học xác suất trong CTGDPT môn Toán 2018 và các cấu trúc cốt lõi của TDXS.

Ở lớp 10, nội dung xác suất tập trung vào khái niệm nền tảng như phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu, biến cố và xác suất cổ điển. Thông qua các yêu cầu như mô tả không gian mẫu, xác định biến cố và tính xác suất trong những tình huống đơn giản bằng phương pháp tổ hợp hoặc sơ đồ cây, HS bước đầu hình thành khả năng nhận diện đầy đủ các khả năng có thể xảy ra và ước lượng xác suất của biến cố. Đồng thời, việc so sánh xác suất giữa các biến cố đơn giản giúp HS phát triển cấu trúc so sánh xác suất, từ đó chuyển dần từ các phán đoán trực giác sang lập luận có cơ sở định lượng. Quá trình này đòi hỏi HS chuyển từ các đánh giá cảm tính sang việc huy động các thao tác đếm, mô hình hóa và so sánh định lượng để lý giải khả năng xảy ra của các biến cố.

Sang lớp 11, chương trình mở rộng nội dung xác suất với các khái niệm về hợp và giao của các biến cố, đặc biệt là tính độc lập của biến cố. Các yêu cầu cần đạt như tính xác suất của biến cố hợp bằng công thức cộng, xác suất của biến cố giao trong trường hợp độc lập bằng công thức nhân hay sử dụng sơ đồ cây trong các bài toán xác suất, đòi hỏi HS phải vận dụng ngôn ngữ tập hợp, các quy tắc xác suất và lập luận logic. Qua đó, HS không chỉ thực hiện các phép tính xác suất mà còn phải phân tích mối quan hệ giữa các biến cố, nhận diện khi nào các biến cố độc lập hoặc phụ thuộc, góp phần làm rõ cấu trúc TDXS liên quan đến tính độc lập. Ở giai đoạn này, HS cần phối hợp giữa biểu diễn trực quan và lập luận logic để phân tích mối quan hệ giữa các biến cố thay vì chỉ vận dụng công thức một cách máy móc.

Ở lớp 12, nội dung xác suất được nâng lên mức cao hơn với việc giới thiệu xác suất có điều kiện, xác suất toàn phần và công thức Bayes. Các yêu cầu như mô tả và vận dụng các công thức này thông qua bảng dữ liệu hai chiều hoặc sơ đồ cây, giải thích ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong các tình huống thực tiễn quen thuộc, giúp HS phát triển khả năng cập nhật xác suất khi có thêm thông tin và mô hình hóa các mối quan hệ giữa các sự kiện. Đây là giai đoạn thể hiện rõ TDXS như một quá trình nhận thức và lập luận trong bối cảnh bất định, vượt ra ngoài tính toán đơn thuần. Điều này đòi hỏi HS phải thực hiện các thao tác suy luận bậc cao như cập nhật xác suất khi có thêm thông tin, điều chỉnh phán đoán ban đầu và biện giải kết quả trong các bối cảnh thực tiễn.

Từ các phân tích trên có thể thấy, nội dung mạch Thống kê và xác suất trong CTGDPT môn Toán 2018 có sự tương thích rõ ràng với sáu cấu trúc cốt lõi của TDXS, bao gồm: Không gian mẫu; Xác suất của biến cố; So sánh xác suất; Tính độc lập; Xác suất có điều kiện và Xác suất toàn phần gắn với công thức Bayes. Các cấu trúc này được hình thành và phát triển theo tiến trình học tập của HS từ lớp 10 đến lớp 12 với mức độ phức tạp và yêu cầu lập luận ngày càng cao, qua đó tạo điều kiện cho HS chuyển từ các phán đoán trực giác sang các suy luận xác suất có cơ sở định lượng và logic trong các tình huống bất định.

2.6. Khung lý thuyết đề xuất phát triển tư duy xác suất cho học sinh trung học phổ thông

2.6.1. Nguyên tắc xây dựng khung

Khung lý thuyết phát triển TDXS cho HS THPT được thiết kế nhằm cụ thể hóa các thành phần nhận thức thành những biểu hiện có thể quan sát và đánh giá được. Quá trình xây dựng khung tuân thủ ba định hướng: *Tính kế thừa và hệ thống*: Tích hợp 6 cấu trúc và 4 cấp độ tư duy từ các khung lý thuyết của Jones và cộng sự (1997, 1999), Tarr và Jones (1997). Khung đảm bảo sự dịch chuyển từ trực giác chủ quan sang lập luận định lượng hình thức, phù hợp với sự phát triển của HS THPT; *Tương thích với chương trình*: Đối chiếu trực tiếp với các yêu cầu đạt của CTGDPT môn Toán 2018 (đã phân tích ở mục 2.4). Điều này giúp khung lý thuyết trở thành công cụ thực tiễn trong việc thiết kế các nhiệm vụ dạy học và bộ công cụ đánh giá năng lực tư duy tại Việt Nam; *Sự mở rộng bậc cao*: Điểm mới của khung là tập trung đặc tả các biểu hiện hành vi trong cấu trúc phức tạp như xác suất toàn phần gắn với công thức Bayes. Đây là cấu trúc tư duy bậc cao, yêu cầu năng lực mô hình hóa và cập nhật xác suất dựa trên thông tin mới, phản ánh trọn vẹn yêu cầu về năng lực toán học ở cấp THPT.

Các biểu hiện hành vi trong ma trận được xây dựng bằng cách chuyên hóa các đặc trưng nhận thức của từng cấp độ tư duy thành các biểu hiện có thể quan sát trong hoạt động học tập xác suất của HS THPT.

2.6.2. Khung mô tả các mức độ phát triển tư duy xác suất cho học sinh trung học phổ thông

Dựa trên các định hướng đã xác lập, khung lý thuyết được cụ thể hóa thành ma trận gồm sáu cấu trúc tương ứng với tiến trình phân phối kiến thức trong CTGDPT môn Toán 2018 và bốn cấp độ phát triển tư duy. Tại mỗi giao điểm giữa cấu trúc và cấp độ, các biểu hiện hành vi được mô tả dựa trên mức độ huy động trực giác, công cụ biểu diễn và lập luận xác suất của HS (bảng 1).

Bảng 1. Ma trận biểu hiện TDXS theo sáu cấu trúc và bốn cấp độ phát triển

Cấp độ Cấu trúc	Cấp 1: Chủ quan	Cấp 2: Chuyên tiếp	Cấp 3: Định lượng không chính thức	Cấp 4: Định lượng số
Không gian mẫu	Liệt kê dựa trên sở thích cá nhân; bỏ sót nhiều khả năng có thể xảy ra.	Liệt kê các kết quả theo một số quy luật trực quan nhưng chưa hệ thống; còn trùng lặp hoặc thiếu trường hợp.	Sử dụng sơ đồ cây hoặc bảng để liệt kê tương đối đầy đủ các kết quả của không gian mẫu trong các phép thử hữu hạn.	Vận dụng quy tắc đếm và lập luận tổ hợp để xác định kích thước không gian mẫu trong các tình huống trừu tượng.
Xác suất của biến cố	Phán đoán dựa trên vận may hoặc ngôn từ cảm tính (chắc là, may, rủi).	Gán giá trị xác suất (như 0, 1, hoặc 0,5) dựa trên kinh nghiệm cá nhân, chưa dựa trên việc đếm các kết quả có thể xảy ra.	Tính xác suất bằng cách thiết lập tỉ số trực tiếp $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ từ việc đếm các kết quả thuận lợi và các kết quả của không gian mẫu.	Vận dụng linh hoạt các quy tắc cộng, quy tắc nhân, biến cố đối và mô hình tổ hợp để tính xác suất và giải thích được ý nghĩa của kết quả.
So sánh xác suất	So sánh xác suất dựa trên cảm nhận chủ quan hoặc ấn tượng ban đầu về tình huống.	Nhận biết được biến cố có khả năng xảy ra cao hơn nhưng chưa có cơ sở định lượng để so sánh.	So sánh dựa trên tỉ lệ phần trăm hoặc phân số trong các tình huống đơn giản.	Phân tích và so sánh xác suất một cách định lượng trong các mô hình bài toán phức hợp; giải thích được ý nghĩa của kết quả.
Tính độc lập	Nhầm lẫn giữa ngẫu nhiên và "bù trừ"; cho rằng kết quả trước ảnh hưởng tất yếu đến kết quả sau.	Nhận diện độc lập trong tình huống quen thuộc nhưng lúng túng khi bối cảnh thay đổi.	Nhận biết độc lập thông qua mô hình thực nghiệm hoặc sơ đồ trực quan.	Kiểm chứng tính độc lập bằng định nghĩa xác suất $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ và thiết lập mô hình lập luận hình thức.

Xác suất có điều kiện	Giữ nguyên cách đánh giá xác suất, không điều chỉnh khi có thêm thông tin.	Nhận thấy không gian mẫu bị thu hẹp nhưng chưa biết cách điều chỉnh cách tính xác suất.	Tính xác suất điều kiện bằng cách đếm trực tiếp trên không gian mẫu đã được thu hẹp.	Vận dụng thành thạo công thức $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ và giải thích được ý nghĩa của thông tin bổ sung trong bối cảnh bài toán.
Xác suất toàn phần gắn với công thức Bayes	Chỉ xét một khả năng riêng lẻ; không tính đến các trường hợp khác có thể xảy ra trong tình huống.	Nhận ra hiện tượng phụ thuộc nhiều giai đoạn nhưng lúng túng khi tổng hợp.	Sử dụng sơ đồ cây để tính xác suất toàn phần; bước đầu biết sử dụng bảng hai chiều để xác định xác suất trong các trường hợp có thêm thông tin.	Vận dụng công thức Bayes để xác định xác suất của biến cố khi có thêm thông tin và biện giải được kết quả trong tình huống thực tiễn.
Công cụ chủ đạo	Trực giác sơ cấp	Kinh nghiệm cá nhân	Sơ đồ trực quan (sơ đồ cây, bảng, biểu đồ Venn)	Mô hình toán học hình thức

Sự chuyển dịch năng lực trong bảng 1 cho thấy ở Cấp độ 3, tư duy của HS dựa trên các biểu tượng trực quan làm điểm tựa cho lập luận. Trong khi đó, ở Cấp độ 4, HS đạt đến trình độ vận hành các cấu trúc toán học trừu tượng thông qua các mô hình kí hiệu và chứng minh logic. Sự phân cấp này đặc biệt quan trọng ở cấu trúc 6, nơi HS không chỉ thực hiện tính toán mà còn thể hiện năng lực suy luận Bayes - mức độ cao nhất của TDXS ở cấp THPT.

Khung lí thuyết này hiện được định vị như một đề xuất khung lí luận ban đầu và cần tiếp tục được hoàn thiện, vận dụng và đánh giá thông qua các nghiên cứu thực nghiệm trong dạy học Thống kê và Xác suất ở trường THPT.

2.6.3. Ý nghĩa ứng dụng của khung mô tả các mức độ phát triển tư duy xác suất của học sinh trung học phổ thông

Khung lí thuyết đề xuất không chỉ có giá trị về mặt hệ thống hóa các thành tố nhận thức mà còn mang ý nghĩa thực tiễn quan trọng trong dạy học Thống kê và Xác suất tại trường THPT:

- *Công cụ đánh giá năng lực*: Khung cung cấp các mô tả biểu hiện cụ thể, giúp GV bước đầu nhận diện và phân loại cấp độ phát triển TDXS của HS. Thay vì chỉ đánh giá kết quả tính toán đúng/sai, GV có thể nhận diện được các khó khăn trong quá trình lập luận và suy luận xác suất của HS để có biện pháp hỗ trợ phù hợp.

- *Định hướng thiết kế nhiệm vụ học tập*: Dựa trên ma trận các cấp độ, GV có thể xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập có tính phân hóa. Đặc biệt, khung hỗ trợ thiết kế các tình huống thực tiễn gắn với suy luận theo công thức Bayes, giúp HS chuyển dịch từ mức độ tính toán máy móc sang năng lực mô hình hóa và ra quyết định trong điều kiện bất định.

- *Cơ sở thực nghiệm sư phạm*: khung lí thuyết này có thể được sử dụng như một hệ quy chiếu cho các nghiên cứu thực nghiệm, giúp theo dõi và phân tích sự phát triển TDXS của HS sau khi áp dụng các biện pháp dạy học.

3. Kết luận

Nghiên cứu đã đề xuất khung lí thuyết phát triển TDXS dành riêng cho HS THPT dựa trên việc tổng hợp các lí thuyết tâm lí học nhận thức và đối chiếu với CTGDPT 2018. Nghiên cứu cho thấy, TDXS ở cấp THPT cần được nhìn nhận như một tiến trình phát triển liên tục, từ việc làm chủ các quy tắc đếm tổ hợp đến khả năng xử lí các mô hình xác suất phức tạp như xác suất có điều kiện và công thức Bayes. Điểm mới của nghiên cứu chính là việc cụ thể hóa các biểu hiện hành vi đặc trưng cho lứa tuổi THPT, góp phần bổ sung cơ sở lí luận cho việc đánh giá TDXS bậc cao trong giáo dục toán học tại Việt Nam hiện nay. Tuy nhiên, nghiên cứu hiện mới dừng ở mức đề xuất khung lí luận và chưa được kiểm chứng thông qua dữ liệu thực nghiệm. Một số biểu hiện trong ma trận vẫn cần tiếp tục được điều chỉnh để tăng khả năng phân hóa và tính khả dụng trong thực tiễn dạy học. Trong thực tiễn triển khai, việc vận dụng khung đòi hỏi GV không chỉ chú trọng rèn luyện kĩ năng tính toán mà còn cần tổ chức các tình huống học tập giúp HS huy động trực giác, lập luận và mô hình hóa trong các bối cảnh bất định. Hướng nghiên cứu tiếp theo sẽ tập trung vào việc thiết kế bộ công cụ khảo sát và đề xuất các quy trình dạy học cụ thể nhằm thúc đẩy HS đạt tới cấp độ “Định lượng chính thức”, đáp ứng yêu cầu phát triển năng lực toán học trong bối cảnh mới.

Tài liệu tham khảo

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1

- Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 241-266). Springer.
- Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Bộ GD-ĐT (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Breen, S., & O'Shea, A. (2010). Mathematical thinking and task design. *Irish Mathematical Society Bulletin*, 66, 39-49.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D. Reidel Publishing Company.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.
- Hoàng Phê (chủ biên, 2003). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng.
- Holyoak, K. J., & Morrison, R. G. (2012). *The Oxford handbook of thinking and reasoning*. Oxford University Press.
- Johnson-Laird, P. N. (1994). Mental models and probabilistic thinking. *Cognition*, 50(1-3), 189-209. [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(94\)90028-0](https://doi.org/10.1016/0010-0277(94)90028-0)
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.
- Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 487-519.
- Kazak, S., & Leavy, A. M. (2018). Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability. In A. M. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Papanastasiou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education* (pp. 37-54). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_3
- Kurt, G. (2023). Young children's probabilistic and statistical reasoning in the context of informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 22(2).
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Pearson Education Limited.
- Moore, D. S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). National Academy Press.
- Moseley, D., Baumfield, V., Elliott, J., Gregson, M., Higgins, S., Miller, J., & Newton, D. P. (2005). *Frameworks for thinking: A handbook for teaching and learning*. Cambridge University Press.
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., & Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 11-37.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children* (L. Leake Jr., P. Burrell, & H. D. Fishbein, Trans.). Routledge & Kegan Paul.
- Sari, A. D., Suryadi, D., & Dasari, D. (2024). Learning obstacle of probability learning based on the probabilistic thinking level. *Journal on Mathematics Education*, 15(1), 207-226.
- Shodiqin, A., Sukestiyarno, Y. L., Wardono, & Isnarto. (2021). Probabilistic thinking profile of mathematics teacher candidates in problem solving based on self-regulated learning. *European Journal of Educational Research*, 10(3), 1199-1213. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1199>
- Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important? In *Proceedings of the APEC-Tsukuba International Conference on Innovative Teaching of Mathematics through Lesson Study* (pp. 39-48).
- Tall, D. (2002). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Taram, A., & Setyawan, F. (2022). Stress tolerance in probabilistic thinking: A case study. *Mathematics Teaching Research Journal*, 14(4).
- Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.