

# KIẾN THỨC CỦA GIÁO VIÊN TRONG DẠY HỌC CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN: TIẾP CẬN TỪ “CƠ SỞ TRI THỨC CHO HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC CỦA GIÁO VIÊN” CỦA LEE SHULMAN

TEACHER KNOWLEDGE IN TEACHING ARITHMETIC AND GEOMETRIC SEQUENCES:  
A PCK-BASED APPROACH FROM LEE SHULMAN’S KNOWLEDGE BASE FOR TEACHING

Nguyễn Tiến Trung<sup>1</sup>,  
Đình Thu Hà<sup>2,+</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội;

<sup>2</sup>Trường THPT Thạch Bàn, thành phố Hà Nội

+Tác giả liên hệ • Email: [dingthuha.hnue@gmail.com](mailto:dingthuha.hnue@gmail.com)

## Article history

Received: 28/01/2025

Accepted: 18/3/2026

Published: 29/4/2026

## Keywords

Teacher knowledge, content knowledge, pedagogical content knowledge (PCK), arithmetic sequences, geometric sequences

## ABSTRACT

The topics of arithmetic and geometric sequences in Grade 11 Mathematics not only play an important role in developing algebraic thinking and mathematical modeling competencies, but are also closely associated with various real-life contexts such as population growth, compound interest, and financial forecasting. Based on the document analysis method and grounded in Lee Shulman’s PCK theoretical framework as well as extended studies on MKT and MPCK, the author proposed an analytical framework consisting of two main components: content knowledge (CK) and pedagogical content knowledge (PCK) in teaching this topic. The research results indicate that teachers not only need to understand the mathematical nature of arithmetic and geometric sequences, but also need to know how to organize activities for discovering patterns, use multiple mathematical representations, anticipate students’ misconceptions, and connect knowledge with real-life contexts. Accordingly, recommendations for the training and professional development of mathematics teachers were proposed. Future studies may further deepen and experimentally evaluate the effectiveness of the proposed framework for teaching arithmetic sequences, geometric sequences, and other mathematics teaching contents. This study provides theoretical and practical foundations for improving the quality of teaching arithmetic and geometric sequences in particular, and for enhancing the professional competence of mathematics teachers in general.

## 1. Mở đầu

Trong Chương trình giáo dục phổ thông (GDPT) môn Toán 2018, chủ đề “cấp số cộng và cấp số nhân” được đưa vào giảng dạy ở lớp 11 thuộc mạch nội dung “Đại số và một số yếu tố giải tích” (Bộ GD-ĐT, 2018). Nội dung này thường được bố trí sau khi HS đã học về hàm số, phương trình, bất phương trình và các kiến thức cơ bản về dãy số, nhằm tạo cơ sở cho việc nghiên cứu các quy luật biến thiên và mô hình tăng trưởng trong toán học. Trong SGK Toán 11 hiện hành theo Chương trình GDPT 2018, “cấp số cộng và cấp số nhân” thường được trình bày trong chương “Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân” hoặc tích hợp trong chủ đề về dãy số và quy luật của dãy số. Nội dung bao gồm các khái niệm về dãy số, công thức số hạng tổng quát, tính chất, tổng  $n$  số hạng đầu tiên và các bài toán thực tiễn liên quan. Chủ đề này có mối liên hệ chặt chẽ với các nội dung được học trước đó như quy luật số ở THCS, hàm số bậc nhất, hàm số mũ và đồng thời là nền tảng cho các nội dung tiếp theo như giới hạn dãy số, lãi suất kép, tăng trưởng theo hàm mũ và mô hình hóa toán học ở cuối cấp THPT (Nguyễn Ái Quốc và Trần Quang Vinh, 2025; Nguyễn Ái Quốc và Trần Chiêu Xuân, 2025).

Về vai trò, chủ đề “cấp số cộng và cấp số nhân” có ý nghĩa đặc biệt trong việc phát triển tư duy đại số và năng lực mô hình hóa toán học cho HS THPT. Thông qua việc nghiên cứu các quy luật tăng giảm của dãy số, HS được rèn luyện khả năng phát hiện quy luật, suy luận quy nạp, khái quát hóa và chuyển đổi giữa các dạng biểu diễn toán học như bảng số liệu, công thức truy hồi, công thức tổng quát và đồ thị. Cấp số cộng giúp HS nhận thức được bản chất của sự biến thiên tuyến tính với hiệu không đổi, trong khi cấp số nhân phản ánh các quá trình tăng trưởng theo cấp số mũ với tỉ số không đổi. Hai dạng quy luật này là cơ sở để HS hiểu sâu hơn về hàm số bậc nhất và hàm số mũ

trong Chương trình Toán THPT. Đồng thời, “cấp số cộng và cấp số nhân” cũng có nhiều ứng dụng thực tiễn trong tài chính, kinh tế và khoa học, chẳng hạn như tính lãi suất ngân hàng, dự báo dân số, mô hình tăng trưởng doanh thu hoặc sự lan truyền thông tin (Pirmanto và cộng sự, 2020). Vì vậy, việc dạy học hiệu quả chủ đề này góp phần phát triển năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn, năng lực giải quyết vấn đề và tư duy mô hình hóa theo định hướng của Chương trình GDPT 2018.

Bài báo nhằm phân tích những yêu cầu về kiến thức của GV trong dạy học chủ đề “cấp số cộng, cấp số nhân” (Toán 11) dựa trên khung Kiến thức nội dung sư phạm (Pedagogical Content Knowledge - PCK) của Lee Shulman, từ đó đề xuất một số định hướng cho đào tạo GV Toán.

## 2. Kết quả nghiên cứu

### 2.1. Lý thuyết về kiến thức cho việc dạy học của giáo viên

Nghiên cứu của Shulman (1987) đã đề cập toàn diện về kiến thức của GV, gọi là cơ sở tri thức cho hoạt động dạy học của GV, và việc đánh giá năng lực GV không thể chỉ dựa trên kiến thức chuyên môn hoặc kỹ năng sư phạm chung, mà cần xem xét loại kiến thức đặc thù (liên quan đến dạy học nội dung cụ thể) giúp GV chuyển hóa tri thức khoa học, tri thức chương trình thành nội dung có thể dạy và học hiệu quả trong lớp học. Phần chung có thể chỉ ra là: Kiến thức sư phạm tổng quát, đặc biệt là những nguyên tắc và chiến lược quản lý và tổ chức lớp học rộng lớn, dường như vượt ra ngoài phạm vi môn học; Kiến thức về người học và đặc điểm của họ; Kiến thức về bối cảnh giáo dục, từ hoạt động của nhóm hoặc lớp học, quản trị và tài chính của các khu vực trường học, đến đặc điểm của cộng đồng và văn hóa; Kiến thức về mục tiêu, mục đích và giá trị giáo dục, và cơ sở triết học và lịch sử của chúng. Đồng thời, phần liên quan đến dạy học cụ thể (nội dung, môn học) ông đề cập tới ba khía cạnh gồm: Kiến thức nội dung (Content Knowledge - CK); Kiến thức về chương trình giảng dạy (curriculum knowledge), đặc biệt là nắm vững các tài liệu và chương trình đóng vai trò là “công cụ nghề nghiệp” của GV; Kiến thức nội dung sư phạm (Pedagogical Content Knowledge - PCK), sự kết hợp đặc biệt giữa nội dung và phương pháp sư phạm, hình thức hiểu biết chuyên môn đặc biệt của riêng họ (Shulman, 1987, tr 8).

Lee Shulman phân biệt hai loại kiến thức cơ bản của GV gồm CK và kiến thức sư phạm (Pedagogical Knowledge - PK). CK là kiến thức về nội dung môn học, tức GV phải hiểu đúng bản chất tri thức chuyên môn mà mình giảng dạy. PK là kiến thức sư phạm chung, bao gồm quản lý lớp học, tổ chức hoạt động học tập, kiểm tra, đánh giá và các phương pháp dạy học không phụ thuộc vào môn học cụ thể (Shulman, 1987). Tuy nhiên, Shulman cho rằng chỉ có CK và PK là chưa đủ để giải thích năng lực nghề nghiệp của GV. Từ đó, ông đề xuất khái niệm PCK như một dạng “kiến thức đặc thù của nghề dạy học”. PCK là sự kết hợp giữa kiến thức nội dung và kiến thức sư phạm, thể hiện ở khả năng chuyển hóa tri thức học thuật thành nội dung phù hợp với nhận thức của HS trong một lĩnh vực/môn học dạy học cụ thể. Đây được xem là đóng góp quan trọng nhất của Shulman đối với lĩnh vực nghiên cứu về đào tạo GV.

PCK là kiến thức sư phạm nội dung, tức là dạng kiến thức giúp GV chuyển hóa tri thức môn học thành tri thức có thể dạy được và học được. Đối với GV dạy môn Toán, PCK không chỉ là “biết Toán” và cũng không chỉ là “biết phương pháp dạy học” nói chung, mà là sự kết hợp đặc thù giữa hiểu biết nội dung toán học với hiểu biết về cách HS học nội dung đó. Trong dạy học “cấp số cộng, cấp số nhân”, PCK thể hiện ở việc GV biết lựa chọn ví dụ, tình huống, biểu diễn và câu hỏi phù hợp để giúp HS hiểu bản chất của quy luật dãy số. Chẳng hạn, GV không chỉ trình bày công thức số hạng tổng quát, mà còn biết tổ chức cho HS quan sát bảng giá trị, phát hiện sự thay đổi giữa các số hạng, giải thích ý nghĩa của công sai/công bội và liên hệ với các tình huống như tiết kiệm tiền, tăng trưởng dân số hoặc lãi kép.

### 2.2. Kiến thức của giáo viên để dạy học môn Toán

Nghiên cứu về sự phát triển năng lực của GV trong môn Toán, dựa trên nền tảng quan niệm về kiến thức của GV do Shulman đã đề xuất, các nhà nghiên cứu đã xác định ba thành phần chính trong nền tảng kiến thức của GV Toán cho phép họ thực hiện vai trò của mình một cách hiệu quả: Kiến thức nội dung môn Toán (mathematical content knowledge - MCK), PK (pedagogical knowledge) và kiến thức dạy học nội dung môn Toán (Mathematical Pedagogical Content Knowledge - MPCK) (Chinnappan và Lawson, 2005). Trong đó, MCK không chỉ bao gồm kiến thức Toán ở mức HS học, mà còn là hiểu biết sâu về cấu trúc toán học, bản chất khái niệm, các mối liên hệ và cách lập luận toán học. MPCK là sự mở rộng của PCK trong bối cảnh dạy học Toán, nhấn mạnh khả năng dạy các ý tưởng toán học cụ thể thông qua biểu diễn, mô hình, ví dụ, xử lý sai lầm HS và tổ chức hoạt động khám phá toán học. MPCK tập trung mạnh vào đặc trưng nhận thức của HS trong học Toán và các cách thức biểu diễn tri thức toán học phù hợp. Cụ thể, trong dạy học chủ đề “cấp số cộng và cấp số nhân”, GV không chỉ cần nắm vững kiến thức toán học (tức là kiến thức MCK liên quan đến việc dạy học các khái niệm của chủ đề này) mà còn cần biết cách chuyển

hóa tri thức đó thành nội dung phù hợp với nhận thức của HS (tức là kiến thức MPCK). Chẳng hạn, nhiều HS có thể áp dụng đúng công thức tính số hạng tổng quát của cấp số nhân nhưng lại không hiểu ý nghĩa của công bội và mối liên hệ giữa các số hạng trong dãy. Khi gặp một dãy số được biểu diễn bằng bảng dữ liệu hoặc trong bối cảnh thực tiễn như lãi suất tiết kiệm, HS thường khó nhận diện quy luật để xác định đây là cấp số nhân. Vì vậy, GV cần biết cách sử dụng nhiều dạng biểu diễn như bảng số, sơ đồ tăng trưởng, tình huống thực tiễn hoặc hoạt động khám phá quy luật để giúp HS hiểu bản chất toán học thay vì chỉ ghi nhớ công thức. Điều này cho thấy vai trò quan trọng của MPCK khi dạy học một nội dung cụ thể, chứ không chỉ là các chiến lược dạy học nói chung đã được đào tạo trong các trường sư phạm.

Nghiên cứu về kiến thức của GV Toán, nhiều mô hình tiếp tục được phát triển, trong đó tiêu biểu là mô hình kiến thức toán để dạy học (Mathematical Knowledge for Teaching - MKT) của Ball và cộng sự (2008), trong đó kiến thức GV được chia thành nhiều thành phần như:

(1) Kiến thức nội dung chung (Common Content Knowledge - CCK) là kiến thức và kỹ năng toán học cơ bản GV cần nắm vững để giải toán, sử dụng đúng thuật ngữ và kí hiệu, cũng như thực hiện chính xác những nhiệm vụ mà họ giao cho HS; đây là loại kiến thức được sử dụng trong nhiều bối cảnh chứ không chỉ riêng trong nghề dạy học. Nghiên cứu cho thấy CCK giữ vai trò quan trọng trong quá trình giảng dạy, vì khi GV tính toán sai, phát âm sai thuật ngữ hoặc gặp khó khăn khi giải toán sẽ ảnh hưởng trực tiếp đến hiệu quả dạy học và làm lãng phí thời gian học tập của HS.

(2) Kiến thức nội dung chuyên biệt (Specialized Content Knowledge - SCK) là loại kiến thức và kỹ năng toán học đặc thù dành riêng cho hoạt động giảng dạy, giúp GV phân tích cách HS tư duy, nhận diện lỗi sai và đánh giá tính đúng đắn của các phương pháp giải trong những trường hợp tổng quát. Chẳng hạn, khi dạy học chủ đề “Cấp số cộng và cấp số nhân”, GV không chỉ biết cách tính số hạng hay tổng của dãy số mà còn phải phân tích vì sao HS nhầm lẫn giữa “cộng thêm một lượng không đổi” và “nhân với một tỉ số không đổi”, từ đó lựa chọn cách giải thích phù hợp để HS hiểu đúng bản chất của từng dạng dãy số.

(3) Kiến thức về nội dung và HS (Knowledge of Content and Students - KCS) là sự kết hợp giữa hiểu biết toán học và hiểu biết về đặc điểm tư duy của HS, giúp GV dự đoán những khó khăn, sai lầm hoặc cách tiếp cận mà HS có thể gặp trong quá trình học toán. Loại kiến thức này hỗ trợ GV lựa chọn ví dụ, thiết kế nhiệm vụ học tập và diễn giải các ý tưởng chưa hoàn chỉnh của HS một cách phù hợp và hiệu quả. Chẳng hạn, khi chọn ví dụ, GV cần dự đoán điều gì sẽ khiến HS hứng thú và có động lực; khi giao bài tập, GV cần dự đoán HS có thể làm gì với bài tập đó và liệu các em sẽ thấy bài tập dễ hay khó; đồng thời, GV cũng phải có khả năng lắng nghe và diễn giải những suy nghĩ đang hình thành và chưa hoàn chỉnh của HS được thể hiện qua cách các em sử dụng ngôn ngữ.

(4) Kiến thức về nội dung và giảng dạy (Knowledge of Content and Teaching - KCT) là sự kết hợp giữa hiểu biết toán học và hiểu biết sư phạm, giúp GV lựa chọn, sắp xếp và biểu diễn nội dung toán học theo cách phù hợp với quá trình học tập của HS. Loại kiến thức này hỗ trợ GV đưa ra các quyết định hay chiến lược giảng dạy như lựa chọn ví dụ, đặt câu hỏi, khai thác ý kiến của HS và điều chỉnh hoạt động học tập nhằm thúc đẩy sự hiểu biết toán học của HS một cách hiệu quả.

Ngoài ra, TEDS-M (Teacher Education and Development Study in Mathematics) là một dự án nghiên cứu và đánh giá quốc tế về đào tạo GV Toán, do International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) tổ chức thực hiện đã tiếp cận khung đánh giá về kiến thức của GV theo hai khía cạnh: MCK và MPCK. Trong đó, MPCK được cấu trúc thành ba thành phần gồm: (1) Kiến thức Chương trình môn Toán (mathematical curricular knowledge); (2) Kiến thức lập kế hoạch dạy học Toán (planning for mathematics teaching and learning); (3) Kiến thức triển khai dạy học Toán trong lớp học (enacting mathematics teaching and learning) (Tatto và cộng sự, 2012).

Mặc dù các nghiên cứu về kiến thức của GV Toán đã đề xuất nhiều cách phân chia và cấu trúc khác nhau, từ mô hình kiến thức của GV của Lee Shulman đến các mô hình MKT của Ball và cộng sự (2008) hay TEDS-M, song điểm chung đều nhấn mạnh rằng kiến thức nghề nghiệp của GV không chỉ bao gồm hiểu biết về nội dung môn Toán mà còn bao gồm khả năng chuyên hóa tri thức đó thành nội dung phù hợp với việc học của HS. Trên cơ sở kế thừa và tổng hợp các tiếp cận này, nghiên cứu này lựa chọn phân tích kiến thức của GV theo hai thành tố chính gồm: MCK và MPCK, đồng thời tích hợp hiểu biết về Chương trình môn Toán vào hai thành tố này nhằm phản ánh rõ đặc trưng nghề nghiệp của GV trong dạy học môn Toán.

### 2.3. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu sử dụng phương pháp nghiên cứu lí luận kết hợp với phân tích tài liệu nhằm xây dựng cơ sở cho việc đề xuất khung phân tích kiến thức của GV trong dạy học “khái niệm cấp số cộng và cấp số nhân”. Các tài liệu được khai thác bao gồm những nghiên cứu nền tảng về CK (Content Knowledge) và PCK (Pedagogical Content

Knowledge của Shulman (1986, 1987), cùng với các nghiên cứu của Ball và cộng sự (2008); Ball và Bass (2003a, b) và Tatto và cộng sự (2010) về kiến thức của GV toán dành cho dạy học. Các tài liệu này làm cơ sở để xác định khung nội dung kiến thức cần có của GV nói chung trong dạy học Toán.

Nguồn tài liệu tiếp theo được sử dụng bao gồm Chương trình GDPT môn Toán và SGK Toán lớp 11, bộ Kết nối tri thức với cuộc sống. Việc lựa chọn tài liệu này đảm bảo đánh giá được đủ về kiến thức chương trình về cấp số cộng, cấp số nhân và việc triển khai trong một bộ sách cụ thể, đặc biệt phù hợp vì bộ sách này đang được lựa chọn sử dụng thống nhất cả nước. Trên cơ sở đó, nghiên cứu tiến hành phân tích nội dung các bài học về “cấp số cộng và cấp số nhân” (trong SGK), đối chiếu với khung PCK của Shulman để xác định các thành tố kiến thức cần thiết của GV, đồng thời mô tả các biểu hiện cụ thể của những thành tố này trong quá trình dạy học các khái niệm toán học liên quan. Mặc dù Shulman xem kiến thức về chương trình giảng dạy là một thành tố độc lập trong hệ thống kiến thức nghề nghiệp của GV, nhưng nghiên cứu này tích hợp các yếu tố liên quan đến chương trình vào hai thành tố CK và PCK. Cách tiếp cận này giúp tập trung phân tích đầy đủ kiến thức của GV trong việc hiểu và tổ chức dạy học khái niệm cấp số cộng, cấp số nhân trong bối cảnh Chương trình GDPT môn Toán 2018 và không tách kiến thức chương trình ra một cách hoàn toàn độc lập với CK và PCK.

Trong quá trình phân tích, nhóm nghiên cứu đã thảo luận với hai chuyên gia có kinh nghiệm (đã bảo vệ luận án tiến sĩ, công bố hơn 3 bài báo khoa học về chủ đề kiến thức của GV Toán) về khung phân tích kiến thức của GV nói chung và khung này được cụ thể hoá trong trường hợp dạy học “khái niệm cấp số cộng, cấp số nhân”. Chẳng hạn như những kiến thức lịch sử về cấp số cộng, cấp số nhân, những sai lầm và khó khăn thường gặp của HS khi học về các khái niệm này, các dạng biểu diễn toán học liên quan và yêu cầu của chương trình đã được sự thảo luận, phân biện sâu sắc và chỉnh sửa, bổ sung (bảng 1). Kết quả phân tích được tổng hợp thành bảng mô tả các thành tố kiến thức, nội dung kiến thức cần có của GV, biểu hiện cụ thể trong dạy học “cấp số cộng, cấp số nhân” và minh chứng tương ứng từ SGK.

## 2.4. Kết quả nghiên cứu

### 2.4.1. Đề xuất khung phân tích kiến thức của giáo viên trong dạy học khái niệm cấp số cộng, cấp số nhân

Từ những trình bày ở trên, trong nghiên cứu này chúng tôi đề xuất khung phân tích kiến thức của GV trong dạy học khái niệm cấp số cộng, cấp số nhân bao gồm hai khía cạnh (như đã trình bày ở trên) bao gồm CK và PCK. Kết quả đề xuất tóm lược như dưới đây (bảng 1):

Bảng 1. Khung phân tích kiến thức của GV trong dạy học “Khái niệm cấp số cộng và cấp số nhân”

Thành tố kiến thức	Nội dung kiến thức cần có của GV	Biểu hiện trong dạy học cấp số cộng, cấp số nhân
Content Knowledge (CK)	Hiểu khái niệm dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân	Giải thích được ý nghĩa của công sai, công bội; phân biệt được quy luật cộng lặp lại và quy luật nhân lặp lại; giải thích được vì sao một dãy số là hoặc không phải là cấp số cộng hoặc cấp số nhân
	Hiểu cấu trúc quy luật và các dạng biểu diễn của cấp số; hiểu mối liên hệ giữa dãy số, công thức truy hồi và công thức tổng quát	Giải thích được mối liên hệ giữa số hạng trước và số hạng sau; bản chất truy hồi và công thức tổng quát; chuyển đổi được giữa bảng số liệu, lời văn, công thức và đồ thị; giải thích được mối quan hệ giữa số hạng trước và số hạng sau trong dãy
	Hiểu mối liên hệ giữa cấp số với các nội dung toán học khác	Liên hệ cấp số cộng với hàm số bậc nhất và cấp số nhân với hàm số mũ; giải thích được các hiện tượng tăng trưởng tuyến tính và tăng trưởng theo cấp số nhân
	Hiểu ý nghĩa thực tiễn của cấp số	Giải thích được, lấy ví dụ, bài tập về các hiện tượng tăng trưởng, các bài toán tài chính lãi kép, dân số, tiết kiệm,... bằng mô hình cấp số. Hiểu và giải thích lịch sử và các ví dụ “tiêu biểu” về cấp số cộng, cấp số nhân trong lịch sử.
	Hiểu nhiều dạng biểu diễn toán học	Chuyển đổi giữa bảng số liệu, công thức, lời văn và đồ thị về/liên quan đến cấp số cộng, cấp số nhân
	Hiểu vị trí, vai trò và mạch liên kết của chủ đề cấp số trong chương trình môn Toán	Nhận thức và giải thích, liên hệ được khi cần về vị trí, mối quan hệ giữa các khái niệm cấp số với kiến thức về dãy số, hàm số (hàm số mũ, hàm số lôgarit), giới hạn dãy số, tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, tích phân, bài toán xác suất lặp, phân phối hình học

<b>Pedagogical Content Knowledge (PCK)</b>	Hiểu khó khăn và sai lầm thường gặp của HS	Dự đoán, nắm được HS có thể học thuộc công thức nhưng không hiểu bản chất quy luật; khó chuyển từ dãy số cụ thể sang công thức tổng quát; khó khăn khi tính tổng của $n$ số hạng; khó nhận diện cấp số trong bài toán thực tiễn
	Biết lựa chọn ví dụ và tình huống phù hợp	Sử dụng bài toán tiết kiệm, tăng trưởng dân số hoặc lãi suất để hình thành khái niệm hoặc có thể lấy ví dụ từ nội bộ môn Toán
	Biết sử dụng các dạng biểu diễn hỗ trợ HS học	Biết sử dụng linh hoạt các công cụ như bảng số, sơ đồ tăng trưởng, đồ thị, mô hình trực quan hoặc tình huống thực tiễn để giúp HS nhận diện quy luật của cấp số
	Biết tổ chức hoạt động khám phá quy luật	Biết tổ chức hoạt động cho HS quan sát sự thay đổi giữa các số hạng, mô tả quy luật bằng lời, phát hiện đại lượng không đổi, khái quát thành công thức
	Biết đặt câu hỏi và dẫn dắt tư duy	Sử dụng câu hỏi gợi mở để HS giải thích quy luật thay vì chỉ thay số vào công thức
	Biết kết nối tri thức toán học với thực tiễn	Biết sử dụng các ví dụ cơ bản, phổ biến, gần gũi (như gửi tiết kiệm, tăng trưởng dân số, số lượng vi khuẩn hoặc bài toán xếp ghế) để hình thành khái niệm
	Hiểu yêu cầu cần đạt và định hướng phát triển năng lực của chương trình để tổ chức dạy học phù hợp	Biết thiết kế hoạt động học tập nhằm phát triển năng lực mô hình hóa, giải quyết vấn đề và giao tiếp toán học

Từ khung đề xuất ở trên, kết hợp với các phần phân tích trong mục 2.4.2, có thể xây dựng hệ thống câu hỏi và nhiệm vụ đánh giá nhằm xác định mức độ hiểu biết và năng lực vận dụng kiến thức của GV trong quá trình dạy học chủ đề này. Trên cơ sở đó, bộ công cụ sẽ được khảo nghiệm và điều chỉnh nhằm bảo đảm độ tin cậy, tính giá trị và khả năng phản ánh đúng đặc trưng kiến thức nghề nghiệp của GV Toán trong dạy học cấp số cộng và cấp số nhân.

#### 2.4.2. Phân tích chi tiết về kiến thức dành cho việc dạy học cấp số cộng, cấp số nhân

##### *Phân tích tiến trình nội dung và các hoạt động, kiến thức liên quan (CK)*

Nội dung dạy học “cấp số cộng” trong SGK môn Toán lớp 11 (bộ Kết nối tri thức với cuộc sống) (Hà Huy Khoái và cộng sự, 2023): Nội dung dạy học về “cấp số cộng” được xây dựng theo hướng từ các tình huống thực tiễn có quy luật “tăng đều”. HS trước hết được tiếp cận thông qua những ví dụ gần gũi như số ghế trong nhà hát tăng thêm một số lượng cố định ở mỗi hàng. Sau đó, cùng với việc quan sát và so sánh các số hạng liên tiếp của dãy gồm tất cả các số tự nhiên lẻ xếp theo thứ tự tăng dần, HS được dẫn dắt nhận ra “kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi”. Trên cơ sở đó, SGK hình thành định nghĩa “cấp số cộng” là dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn hệ thức  $u_n = u_{n-1} + d$ , với  $n \geq 2$  trong đó  $d$  là công sai của dãy. Sau đó, các khái niệm tiếp theo là số hạng tổng quát và tổng của  $n$  số hạng đầu. Công sai  $d = u_{n+1} - u_n$  được xem là đại lượng đặc trưng cho mức tăng hoặc giảm đều của dãy số, đồng thời phản ánh tốc độ “biến thiên tuyến tính” của hiện tượng. Từ công thức truy hồi, HS tiếp tục khám phá quy luật để xây dựng công thức số hạng tổng quát  $u_n = u_1 + (n - 1)d$ , với  $n \geq 2$  tức là chuyển từ việc mô tả quy luật sang biểu diễn mô hình tổng quát. Tiếp theo, thông qua hoạt động ghép cặp các số hạng đầu và cuối, HS hình thành công thức tính tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số cộng theo một trong hai công thức:  $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n - 1)d]$  hoặc  $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ . Nội dung này không chỉ giúp phát triển tư duy quy luật và tối ưu hóa mà còn tạo cơ sở để giải quyết các bài toán tích lũy trong thực tiễn. Các bài toán có nội dung thực tiễn được đưa vào bao gồm: mô hình xếp ghế trong rạp hát giúp HS nhận biết trực quan tính chất “hiệu không đổi”; bài toán tiền lương hoặc giá xe ô tô giúp HS hiểu về tăng trưởng tuyến tính và lập kế hoạch tài chính; các ví dụ về dân số tăng thêm một lượng gần như không đổi qua từng năm giúp HS phân biệt giữa tăng trưởng tuyến tính và tăng trưởng theo cấp số nhân (sau này); bài toán về cầu thang vào chiều cao của bậc cầu thang, sàn nhà;... Đồng thời, trong sách có phần hướng dẫn về việc tính tổng của  $n$  số hạng liên tiếp bằng máy tính cầm tay. Khái niệm cấp số cộng liên quan đến các kiến thức về dãy số, hàm số bậc nhất, phương trình bậc nhất, quy luật tăng tuyến tính, tọa độ điểm trên đường thẳng, bài toán đếm và tổng hữu hạn trong đại số. Tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số cộng liên quan đến phép cộng dồn, bài toán tính nhanh, bài toán đếm và tư duy tổng hữu hạn trong đại số và giải tích.

Trong tự cách tiếp cận khái niệm cấp số cộng, sách tiếp cận khái niệm “cấp số nhân” theo hướng hình thành kiến thức từ các hiện tượng thực tiễn có quy luật “tăng hoặc giảm theo tỉ lệ”. HS được tiếp cận khái niệm thông qua các tình huống gần gũi như lương chuyên gia về công nghệ thông tin tăng theo phần trăm qua từng năm (5%), và dãy số như  $(u_n)$  với  $u_n = 3 \cdot 2^n$ . Từ việc quan sát mối quan hệ giữa 5 số hạng đầu tiên liên tiếp của dãy, HS được dẫn dắt nhận ra rằng tỉ số giữa hai số hạng liên tiếp luôn không đổi, và đi tới định nghĩa “cấp số nhân” là dãy số  $(u_n)$  thỏa mãn hệ thức  $u_n = u_{n-1} \cdot q$ , với  $n \geq 2$  trong đó  $q$  là công bội. Tiếp đó là các khái niệm số hạng tổng quát và tổng của  $n$  số hạng đầu (tương tự như với cấp số cộng). Công bội  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$  được xem là đại lượng đặc trưng cho mức tăng hoặc giảm theo tỉ lệ của dãy số, phản ánh tốc độ tăng trưởng theo hàm mũ của hiện tượng. Từ công thức truy hồi, HS tiếp tục khám phá quy luật để xây dựng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân dưới dạng  $u_n = u_1 q^{n-1}$ , với  $n \geq 2$  và qua đó chuyển từ việc mô tả quy luật sang biểu diễn tổng quát. Tiếp theo, thông qua việc phân tích và biến đổi các tổng có cấu trúc lặp theo tỉ lệ, HS hình thành công thức tính tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số nhân:  $S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$  với  $q \neq 1$ . Nội dung này có ý nghĩa quan trọng trong việc phát triển tư duy mô hình hóa và giải quyết các bài toán thực tiễn liên quan đến tăng trưởng và tích lũy theo cấp số nhân. Các SGK cũng đặc biệt nhấn mạnh mối liên hệ giữa cấp số nhân với nhiều hiện tượng trong đời sống và khoa học (trong các ví dụ và bài tập) như: về tăng lương theo phần trăm cố định (chứ không phải một khoản cố định); tỉ lệ tăng vi khuẩn; phương án trả lương (trả lương tuyến tính hoặc trả lương theo phần trăm); tỉ lệ giảm giá trị của máy ủi; tốc độ tăng trưởng dân số theo phần trăm; tỉ lệ thuốc trong máu; tỉ lệ phân đôi vi khuẩn E. Coli;... Như vậy, có thể thấy, cấp số nhân không chỉ được tiếp cận như một đối tượng toán học thuần túy mà còn như một mô hình quan trọng để mô tả các quá trình biến đổi trong tự nhiên, xã hội và đời sống. Khái niệm cấp số nhân liên quan đến các kiến thức về dãy số, lũy thừa, hàm số mũ, logarit, quy luật tăng trưởng theo cấp số mũ, phép vị tự trong hình học và các bài toán giới hạn, chuỗi số trong giải tích. Tổng  $n$  số hạng đầu của cấp số nhân liên quan đến lũy thừa, biến đổi đại số, chuỗi hình học, giới hạn, tổng vô hạn và các mô hình tăng trưởng hoặc suy giảm theo hàm mũ.

Tóm lại, có thể thấy một số kết quả như sau: (1) Hai khái niệm đều được tiếp cận theo hướng đi từ tình huống thực tiễn, bảng số liệu và hình ảnh trực quan trước khi hình thành công thức toán học; (2) Hoạt động học được dự kiến tổ nhằm giúp HS quan sát, so sánh, dự đoán và phát hiện quy luật của dãy số, qua đó phát triển tư duy, năng lực mô hình hóa toán học; (3) HS được rèn luyện khả năng chuyển đổi giữa nhiều dạng biểu diễn của dãy số như mô tả bằng lời, bảng giá trị, công thức truy hồi và công thức tổng quát nhằm phát triển năng lực mô hình hóa toán học; (4) Nội dung “cấp số cộng và cấp số nhân” được xây dựng theo định hướng liên hệ với các mô hình tăng trưởng tuyến tính và tăng trưởng hàm mũ, tạo nền tảng cho việc học hàm số, giải tích và các ứng dụng mô hình hóa trong kinh tế, khoa học dữ liệu sau này.

#### *Phân tích về khó khăn, thách thức và lưu ý trong dạy học (PCK)*

Nhiều nghiên cứu trong giáo dục Toán cho thấy HS thường có xu hướng học các công thức về dãy số, cấp số cộng và cấp số nhân theo hướng ghi nhớ thủ tục hơn là hiểu bản chất toán học của quy luật. Điều này dẫn đến việc HS có thể áp dụng công thức tính toán nhưng gặp khó khăn khi giải thích ý nghĩa của quy luật hoặc kết nối giữa các số hạng trong dãy. Dựa trên những quan sát ban đầu, nhiều HS lớp gặp khó khăn trong việc hiểu bài về chủ đề này, chẳng hạn là gặp nhiều khó khăn khi xây dựng công thức tổng quát của dãy số. Một số HS không thể phân biệt giữa dãy số cấp số cộng và cấp số nhân, gặp khó khăn trong việc xác định công thức cho số hạng thứ  $n$ , và không hiểu khái niệm tổng của một dãy số (Nuraini và Imami, 2025). Nhiều HS vẫn gặp khó khăn trong việc giải các bài toán về chủ đề dãy số và chuỗi số vì các em chưa thể hiểu được câu hỏi hoặc sử dụng thuật ngữ, dẫn đến việc không thể chọn công thức theo đúng yêu cầu của câu hỏi (Khairullah và Heriyana, 2023). Những khó khăn này cho thấy sự hiểu biết của HS về các khái niệm toán học trong nội dung này vẫn cần được nghiên cứu thêm. Đồng thời, về mặt sư phạm, việc dạy học thiên về thủ tục và luyện tập công thức làm hạn chế sự phát triển hiểu biết khái niệm của HS trong các chủ đề đại số và hàm số; nhiều HS chỉ tập trung vào thao tác tính toán thay vì hiểu các quan hệ toán học (Qetrani và cộng sự, 2021) đặc biệt là phải chú trọng cẩn thận đến các giai đoạn phát triển khả năng hiểu biết của HS (Hiebert và Lefevre, 1986). Hơn nữa, cần có các chiến lược học tập hướng đến việc hiểu các khái niệm hơn, chẳng hạn như các phương pháp khám phá và thảo luận và GV cần chú ý hơn đến các mô hình lỗi mà HS thường mắc phải để cung cấp hướng dẫn phù hợp hơn trong việc hiểu khái niệm dãy số (Nuraini và Imami, 2025).

Đồng thời, HS cũng gặp nhiều khó khăn khi vận dụng kiến thức về “cấp số cộng và cấp số nhân” vào các tình huống thực tiễn. Chẳng hạn, Yusup (2023) đã chỉ ra HS thường lúng túng khi chuyển các bài toán ngữ cảnh thực tế thành biểu thức toán học phù hợp, đặc biệt trong các bài toán dãy số và cấp số (Agustiani, 2021). Nhiều HS có thể

thực hiện phép tính nhưng không thiết lập được mối liên hệ giữa bối cảnh thực tiễn và cấu trúc toán học của cấp số, dẫn đến việc giải quyết vấn đề thiếu tính khái quát và thiếu ý nghĩa toán học (Agustiani, 2021). Cùng cố thêm vấn đề này, Baidoo và Ali (2023) cho rằng, HS thường thiếu hiểu biết mang tính khái niệm về các biểu thức đại số, nên GV cần chú trọng giải thích bản chất và ý nghĩa toán học của bài toán thay vì chỉ hướng dẫn các thủ tục biến đổi và tính toán. Do đó, GV cần tăng cường sử dụng các bối cảnh thực tế, đa dạng hình thức biểu diễn, công nghệ và hướng dẫn siêu nhận thức để hỗ trợ HS tiếp cận và giải quyết vấn đề hiệu quả hơn. Ngoài ra, có thể có một khó khăn khác là HS nhầm lẫn giữa tăng trưởng tuyến tính và tăng trưởng theo cấp số mũ. Khi học cấp số cộng và cấp số nhân, nhiều HS chưa phân biệt rõ bản chất của “hiệu không đổi” và “tỉ số không đổi”, dẫn đến việc áp dụng sai mô hình toán học trong các bài toán thực tiễn liên quan đến tăng trưởng.

### 3. Kết luận

Nghiên cứu này cho thấy dạy học chủ đề “cấp số cộng và cấp số nhân” không chỉ đòi hỏi GV nắm vững kiến thức toán học về dãy số, quy luật tăng trưởng tuyến tính và tăng trưởng theo cấp số mũ, mà còn cần có hệ thống kiến thức sư phạm nội dung đặc thù để chuyên hóa các khái niệm toán học thành nội dung học tập phù hợp với HS. Khung phân tích dựa trên cách tích hợp kiến thức về chương trình giảng dạy vào CK và PCK được đề xuất trong nghiên cứu này phù hợp khi phân tích kiến thức nghề nghiệp của GV trong dạy học chủ đề này, và có thể sử dụng để phân tích cho các chủ đề khác trong môn Toán. Kết quả nghiên cứu cũng chỉ ra rằng nội dung “cấp số cộng và cấp số nhân” trong SGK Toán 11 được thiết kế theo định hướng phát triển năng lực mô hình hóa toán học, tư duy thuật toán và khả năng chuyển đổi giữa nhiều dạng biểu diễn toán học, qua đó tạo nên tầng cho việc học các nội dung tiếp theo như hàm số mũ, lôgarit và giải tích. Trong dạy học “cấp số cộng và cấp số nhân”, GV cần chú trọng tổ chức các hoạt động giúp HS phát hiện và giải thích quy luật thay vì chỉ luyện tập áp dụng công thức. Việc sử dụng các bảng số liệu, sơ đồ tăng trưởng, tình huống thực tiễn hoặc nhiều dạng biểu diễn toán học khác nhau cần được xem như một thành tố quan trọng để hỗ trợ HS hiểu bản chất của “hiệu không đổi” và “tỉ số không đổi”, đồng thời phân biệt được tăng trưởng tuyến tính và tăng trưởng theo cấp số mũ. Bên cạnh đó, GV cần quan tâm nhiều hơn đến các sai lầm và khó khăn nhận thức của HS, đặc biệt là xu hướng học thuộc công thức nhưng chưa hiểu mối liên hệ giữa quy luật dãy số và bối cảnh thực tiễn.

Kết quả nghiên cứu cũng góp phần khuyến nghị điều chỉnh chương trình đào tạo GV theo hướng tăng cường phát triển PCK theo từng chủ đề cụ thể của môn Toán, trong đó chú trọng năng lực phân tích sai lầm HS, sử dụng và chuyển đổi các dạng biểu diễn toán học, thiết kế hoạt động khám phá quy luật và kết nối với thực tiễn trong dạy học. Sinh viên sư phạm cần được trải nghiệm việc thiết kế các tình huống dạy học nhằm phát triển khả năng kết nối giữa thực tiễn, tri thức toán học và tri thức dạy học. Đồng thời, phát triển chuyên môn cho GV/sinh viên sư phạm Toán thông qua phân tích video, nhằm xác định và phân tích các sai lầm hoặc khó khăn của HS trong quá trình giải bài tập cũng có thể là một chiến lược phù hợp nhằm nâng cao PCK cho GV/sinh viên sư phạm Toán. Hạn chế của nghiên cứu là chưa kiểm nghiệm đánh giá về hiệu quả của khung phân tích đã đề xuất. Các nghiên cứu tiếp theo có thể triển khai xây dựng đề kiểm tra, đánh giá, từ khung này dựa theo mô hình đã có của TED-M để đánh giá về kiến thức của GV trong dạy học cấp số cộng, cấp số nhân, cũng như các chủ đề, khái niệm khác trong môn Toán.

**Lời cảm ơn:** Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 503.01-2023.04. Nhóm nghiên cứu trân trọng cảm ơn Quỹ NAFOSTED đã tài trợ và Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội đã hỗ trợ chúng tôi thực hiện nghiên cứu này.

### Tài liệu tham khảo

- Agustiani, N. (2021). Analyzing Students' Errors in Solving Sequence and Series Application Problems Using Newman Procedure. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 5(1), 23-32. <http://dx.doi.org/10.12928/ijeme.v5i1.17377>
- Baidoo, J., & Ali, C. A. (2023). Students' mathematics and real life contexts in solving algebraic word problems. *Al-Jabar: Pendidikan Matematika*, 14(2), 483-500. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v14i2.19272>
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003a). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003b). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study*

- Group (pp. 3-14). Edmonton, Alberta, Canada: Canadian Mathematics Education Study Group (Groupe Canadien d'étude en didactique des mathématiques).
- Ball, D.L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018-TTBGDDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Chinnappan, M., & Lawson, M. J. (2005). A Framework for Analysis of Teachers' Geometric Content Knowledge and Geometric Knowledge for Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 197-221. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0852-6>
- Hà Huy Khoái (tổng chủ biên), Cung Thế Anh, Trần Văn Tấn, Đặng Hùng Thắng (đồng chủ biên), Trần Mạnh Cường, ..., Nguyễn Thị Kim Sơn (2023). *Toán 11 (tập 1)*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Khairullah, W., & Heriyana, T. (2023). Nasional kuningan matematika. Hal tersebut terjadi karena siswa merasa kesulitan dalam proses penyelesaian. *Indo-MathEdu Intellectuals Journal*, 4(2), 427-444. <https://doi.org/10.54373/imeij.v4i2.185>
- Nguyễn Ái Quốc, Trần Chiêu Xuân (2025). Dạy học giải các bài toán chủ đề “Cấp số nhân” (Toán 11) nhằm bồi dưỡng năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh. *Tạp chí Giáo dục*, 25(số đặc biệt 11), 162-167. <https://tcgd.tapchigiaoduc.edu.vn/index.php/tapchi/article/view/4914>
- Nguyễn Ái Quốc, Trần Quang Vinh (2025). Phát triển năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh trong dạy học chủ đề “Cấp số nhân” (Toán 11). *Tạp chí Giáo dục*, 25(5), 104-108. <https://tcgd.tapchigiaoduc.edu.vn/index.php/tapchi/article/view/3816>
- Nuraini, I. & Imami, A. I. (2025). Analysis of the students' mathematical conceptual understanding ability on sequences and series material in senior high school. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(1), 01-14. <https://doi.org/10.24127/emteka.v6i1.7661>
- Pirmanto, Y., Farid Anwar, M., & Bernard, M. (2020). Analisis Kesulitan Siswa SMA dalam Menyelesaikan Soal Pemecahan Masalah pada Materi Barisan dan Deret dengan Langkah-langkah Menurut Polya. *Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif*, 3(4), 371-384. <https://doi.org/10.22460/jpmi.v3i4.371-384>
- Qetrani, S., Ouailal, S., & Achtaich, N. (2021). Enhancing Students' Conceptual and Procedural Knowledge Using a New Teaching Approach of Linear Equations Based on the Equivalence Concept. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(7), em1978. <https://doi.org/10.29333/ejmste/10938>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundation of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.2307/1175860>
- Tatto, M. T., Lehman, S., & Novotná, J. (2010). The organization of the mathematics preparation and development of teachers: A report from the ICMI Study 15. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 313-324.
- Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M., & Rowley, G. (2012). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries. *Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. IEA. <https://www.iea.nl/publications/study-reports/international-reports-iea-studies/policy-practice-and-readiness-teach>
- Yusup, M. (2023). Students' errors in solving math problems in the form of stories on the topic of sequences and series. *Jurnal Inovasi Pembelajaran Matematika: PowerMathEdu (PME)*, 2(3), 269-280. <https://doi.org/10.31980/pme.v2i3.1764>