

KHÓ KHĂN NHẬN THỨC CỦA HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG KHI KẾT NỐI KHÔNG GIAN LÀM VIỆC XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM VÀ CỔ ĐIỂN QUA MÔ PHÒNG BẰNG EXCEL

HIGH SCHOOL STUDENTS' COGNITIVE DIFFICULTIES IN CONNECTING FREQUENTIST AND CLASSICAL PROBABILITY WORKING SPACES THROUGH EXCEL-BASED SIMULATION

Trần Kiêm Minh¹,
Nguyễn Thị Sinh^{1,2,+}

¹Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế;
²Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng
+Tác giả liên hệ • Email: ntsinh@ued.udn.vn

Article history

Received: 25/6/2026

Accepted: 11/8/2026

Published: 05/10/2026

Keywords

Probability, mathematical working spaces, probability working spaces, probability simulation, cognitive difficulties

ABSTRACT

Although simulation and digital technologies are widely regarded as effective tools for teaching probability, many students still encounter difficulties in connecting experimental probability and theoretical probability. This study employs the Mathematical Working Spaces (MWS) framework to investigate students' cognitive difficulties when establishing connections between the Frequentist Probability Working Space (FPWS) and the Classical Probability Working Space (CPWS) through Excel-based simulations. The study was conducted within a design research approach using a qualitative experimental methodology involving Grade 12 students in Hue and Da Nang, Vietnam. Data were collected from students' worksheets, Excel simulation files, and semi-structured interviews. Two representative cases were selected and analyzed through the three dimensions of MWS: semiotic, instrumental, and discursive. The findings revealed three major types of cognitive difficulties: difficulties in coordinating probability representations, including frequency, relative frequency, and probability; an imbalance between instrumental genesis and discursive genesis; and the dominance of empirical references in students' mathematical work when connecting FPWS and CPWS. The findings contribute to a deeper understanding of the nature of students' difficulties in learning probability from an MWS perspective and suggest the need to design instructional activities that place greater emphasis on fostering connections among empirical data, technological tools, and probabilistic reasoning.

1. Mở đầu

Xác suất là một trong những nội dung quan trọng của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (Bộ GD-ĐT, 2018). Mục tiêu của dạy học xác suất ở THPT không chỉ giúp HS thực hiện các phép tính xác suất mà còn phát triển khả năng nhận biết, mô tả và giải thích các hiện tượng ngẫu nhiên thông qua việc kết nối dữ liệu thực nghiệm với các mô hình xác suất (Batanero và cộng sự, 2016). Vì vậy, việc tổ chức các hoạt động học tập giúp HS kết nối giữa trải nghiệm thực nghiệm và lập luận xác suất lý thuyết trở thành một yêu cầu quan trọng trong dạy học xác suất hiện nay.

Sự phát triển của công nghệ số đã mở ra nhiều cơ hội đổi mới dạy học xác suất. Các công cụ mô phỏng như Excel cho phép HS thực hiện số lượng lớn các phép thử ngẫu nhiên, quan sát sự biến thiên của tần suất và khám phá mối liên hệ giữa dữ liệu thực nghiệm với xác suất lý thuyết. Nhiều nghiên cứu đã khẳng định mô phỏng có thể đóng vai trò cầu nối giữa xác suất thực nghiệm và xác suất lý thuyết, góp phần phát triển trực giác xác suất và hỗ trợ HS xây dựng các lập luận xác suất (Kazak và Pratt, 2021; Parzysz, 2009; Prodromou, 2012; Pfannkuch và cộng sự, 2016). Trong những năm gần đây, nhiều nghiên cứu đã phân tích những khó khăn của HS khi học xác suất. Các tác giả chỉ ra rằng HS thường nhầm lẫn giữa tần số, tần suất và xác suất; gặp khó khăn khi chuyển từ kết quả thực nghiệm sang xác suất lý thuyết; hoặc xem xác suất thực nghiệm và xác suất cổ điển như hai đối tượng tách biệt (English và Watson, 2016; Fischer, 2026; Ireland và Watson, 2009; Park và Kim, 2023; Prodromou, 2012). Tuy nhiên, phần lớn các nghiên cứu hiện có chủ yếu tập trung mô tả các sai lầm hoặc ngộ nhận của HS đối với từng khái niệm xác suất, hoặc đánh giá hiệu quả của mô phỏng như một công cụ hỗ trợ học tập. Còn rất ít nghiên cứu phân tích bản chất của những khó khăn nhận thức trong quá trình HS kết nối giữa xác suất thực nghiệm và xác suất lý thuyết, đặc biệt dưới góc

nhìn cấu trúc của công việc toán học. Trong bối cảnh Chương trình giáo dục phổ thông 2018 khuyến khích khai thác công nghệ và trải nghiệm với dữ liệu, việc thiết kế các hoạt động học giúp HS phối hợp giữa mô phỏng, dữ liệu thực nghiệm và lập luận xác suất vẫn còn là một thách thức. Về mặt nghiên cứu, thực tiễn đó đòi hỏi cần sử dụng một khung lý thuyết phù hợp để phân tích và hiểu hoạt động toán học của HS trong các tình huống học tập như vậy, qua đó làm rõ cách HS huy động, phối hợp và chuyển đổi giữa các mô hình xác suất trong quá trình giải quyết vấn đề.

Lý thuyết “Không gian làm việc toán học” (Mathematical Working Spaces - MWS) của Kuzniak và cộng sự (2016), Kuzniak (2022) cung cấp một cách tiếp cận phù hợp cho mục tiêu này. Khác với các nghiên cứu chỉ xem khó khăn của HS như những sai sót về khái niệm hoặc về kết quả, MWS cho phép phân tích đồng thời cấu trúc tri thức luận của nhiệm vụ toán học và quá trình nhận thức của HS thông qua sự tương tác giữa ba quá trình: hình thành kí hiệu (*semiotic genesis*), hình thành công cụ (*instrumental genesis*) và hình thành lập luận (*discursive genesis*). Trên cơ sở đó, chúng tôi xem việc kết nối giữa không gian làm việc xác suất thực nghiệm (Frequentist Probability Working Space - FPWS) và không gian làm việc xác suất cổ điển (Classical Probability Working Space - CPWS) là quá trình HS phối hợp các biểu diễn xác suất, công cụ mô phỏng và lập luận toán học để chuyển từ dữ liệu thực nghiệm sang mô hình xác suất lý thuyết và ngược lại. Cách tiếp cận này không chỉ giúp nhận diện các khó khăn nhận thức mà còn góp phần giải thích bản chất của chúng dưới góc nhìn MWS. Xuất phát từ khoảng trống nghiên cứu trên, bài báo tập trung trả lời câu hỏi nghiên cứu: *Những khó khăn nhận thức nào xuất hiện trong quá trình HS phối hợp ba quá trình hình thành kí hiệu, công cụ và lập luận khi kết nối giữa FPWS và CPWS thông qua hoạt động mô phỏng với Excel?*

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Thiết kế nghiên cứu

Chúng tôi lựa chọn kiểu nghiên cứu dựa trên thiết kế của didactic toán, gọi là kĩ nghệ didactic (Artigue, 2014), trong đó thiết kế tình huống, thực nghiệm và phân tích hậu nghiệm được liên kết thông qua phân tích tri thức luận và sự đối chiếu giữa phân tích tiên nghiệm với hậu nghiệm.

Nghiên cứu được thực hiện qua bốn giai đoạn: (1) Phân tích tri thức luận và chương trình; (2) Thiết kế các tình huống học tập dựa trên lý thuyết MWS và phân tích tiên nghiệm; (3) Triển khai thực nghiệm dạy học trên lớp; (4) Phân tích hậu nghiệm công việc toán học của HS theo lý thuyết MWS. Dữ liệu sử dụng trong bài báo này được thu thập từ buổi thực nghiệm thứ hai, sau khi tình huống học tập đã được tiến hành thực nghiệm dạy học trên lớp.

2.2. Đối tượng nghiên cứu và thu thập dữ liệu

Nghiên cứu được thực hiện tại hai lớp 12 thuộc một trường THPT ở TP. Huế và một ở TP. Đà Nẵng. Mỗi lớp có khoảng 35 HS (17-18 tuổi) và đã hoàn thành các nội dung cơ bản về xác suất theo Chương trình giáo dục phổ thông.

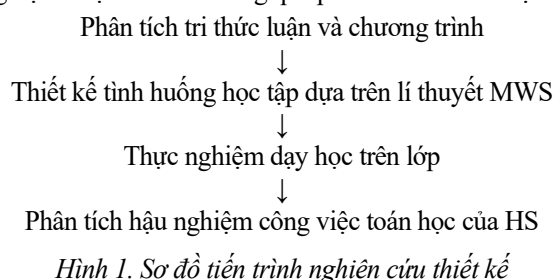
Bài báo sử dụng dữ liệu của buổi thực nghiệm thứ hai với nhiệm vụ mô phỏng phép thử “Tung một con xúc xắc sáu mặt cân bằng” bằng Excel. Yêu cầu HS mô phỏng số lần tung tăng dần (30, 100, 300 và 500 lần), tính tần số, tần suất, xác suất lý thuyết của biến cố “xuất hiện mặt chẵn” và so sánh kết quả mô phỏng với giá trị xác suất cổ điển.

Dữ liệu được thu thập từ ba nguồn: (1) Phiếu học tập của các nhóm HS; (2) Các tệp Excel chứa kết quả mô phỏng; (3) Ghi âm và ghi chép các cuộc phỏng vấn bán cấu trúc được thực hiện ngay sau khi HS hoàn thành nhiệm vụ.

Chúng tôi sử dụng phương pháp chọn mẫu có chủ đích để lựa chọn hai trường hợp nghiên cứu điển hình. Cặp Khải - Trang được chọn vì thể hiện rõ sự chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm và sự mất cân bằng giữa quá trình hình thành công cụ và lập luận. Cặp Ngân - Phúc được chọn vì gặp khó khăn trong việc phối hợp giữa các biểu diễn xác suất và quá trình điều chỉnh lập luận khi kết nối giữa FPWS và CPWS. Hai trường hợp này đại diện cho các dạng khó khăn nhận thức nổi bật được nhận diện trong toàn bộ dữ liệu của các nhóm HS tham gia nghiên cứu.

2.3. Phân tích tiên nghiệm tình huống học tập

Tình huống học tập được thiết kế nhằm tạo điều kiện để HS vận hành trong FPWS và từng bước kết nối với CPWS. Trong FPWS, HS sử dụng các hàm RANDBETWEEN(1,6) để tạo dữ liệu ngẫu nhiên và COUNTIF để xác định tần số xuất hiện của từng mặt xúc xắc, từ đó tính các giá trị tần suất tương ứng. Khi số lần mô phỏng tăng dần từ 30 đến 500, HS có cơ hội quan sát sự ổn định tương đối của tần suất quanh giá trị xác suất lý thuyết. Ở nhiệm vụ cuối, HS được yêu cầu tính xác suất cổ điển của biến cố “xuất hiện mặt chẵn” và so sánh với kết quả mô phỏng. Tình huống này tạo điều kiện để HS phối hợp giữa dữ liệu thực nghiệm, công cụ công nghệ và lập luận xác suất, đồng thời có khả năng làm xuất hiện những khó khăn nhận thức trong quá trình kết nối giữa FPWS và CPWS.



Hình 1. Sơ đồ tiến trình nghiên cứu thiết kế

2.4. Phân tích dữ liệu

Dữ liệu được phân tích theo phương pháp phân tích nội dung định tính dưới góc nhìn của lý thuyết MWS, tập trung vào ba quá trình trong MWS: (1) Quá trình hình thành kí hiệu: phân tích cách HS sử dụng, chuyển đổi và phối hợp các biểu diễn xác suất như tần số, tần suất và xác suất; (2) Quá trình hình thành công cụ: phân tích vai trò của Excel trong việc tạo, xử lý dữ liệu và hỗ trợ HS hình thành hiểu biết xác suất; (3) Quá trình hình thành lập luận: phân tích cách HS giải thích, biện minh và thiết lập mối liên hệ giữa dữ liệu mô phỏng với mô hình xác suất cổ điển.

Các khó khăn nhận thức được nhận diện thông qua việc phân tích đồng thời bài làm, dữ liệu mô phỏng và các phát biểu của HS trong phỏng vấn, tập trung vào những thời điểm HS gặp khó khăn trong quá trình phối hợp giữa FPWS và CPWS. Chúng tôi xây dựng bảng phân tích dữ liệu, trong đó mỗi biểu hiện của HS được tham chiếu với ba quá trình hình thành của MWS nhằm xác định loại khó khăn nhận thức tương ứng.

Bảng 1. Bảng phân tích dữ liệu theo lý thuyết MWS

Quá trình hình thành	Dữ liệu phân tích	Chỉ báo quan sát	Khó khăn nhận diện
Kí hiệu	Phiếu học tập, phỏng vấn	Phối hợp giữa tần số, tần suất và xác suất	Khó khăn trong phối hợp các biểu diễn xác suất
Công cụ	File Excel, dữ liệu mô phỏng	Sử dụng các hàm RANDBETWEEN, COUNTIF, diễn giải dữ liệu	Mất cân bằng giữa công cụ và lập luận
Lập luận	Phiếu học tập, phỏng vấn	Giải thích sự hội tụ của tần suất và xác suất	Chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm

Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi tập trung phân tích ba quá trình hình thành vì đây là những quá trình động phản ánh trực tiếp sự vận hành của công việc toán học và có thể quan sát được từ dữ liệu thực nghiệm (phiếu học tập, dữ liệu mô phỏng và phỏng vấn). Do đó, ba quá trình hình thành được sử dụng như khung phân tích dữ liệu, chứ không đại diện cho toàn bộ cấu trúc của lý thuyết MWS.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Cơ sở lý thuyết

3.1.1. Khó khăn nhận thức của học sinh trong học xác suất

Xác suất từ lâu được xem là một trong những nội dung khó đối với HS, đặc biệt khi chuyển đổi giữa kết quả thực nghiệm và các giá trị xác suất được xác định bằng lập luận toán học, nhiều chương ngại nhận thức có thể xuất hiện.

Trong nghiên cứu này, “khó khăn nhận thức” được hiểu là những trở ngại xuất hiện khi HS huy động, phối hợp và chuyển đổi giữa các thành phần của công việc toán học trong quá trình kết nối FPWS và CPWS. Khó khăn nhận thức không được đồng nhất với một câu trả lời sai hay một lỗi tính toán đơn lẻ, mà được nhận diện khi HS gặp trở ngại trong việc phối hợp các biểu diễn xác suất, sử dụng công cụ hoặc xây dựng lập luận để thiết lập mối liên hệ giữa dữ liệu thực nghiệm và mô hình xác suất cổ điển. Dưới góc nhìn MWS, các khó khăn này được xem xét thông qua sự vận hành và phối hợp của ba quá trình: hình thành kí hiệu, hình thành công cụ và hình thành lập luận.

Theo Prodromou (2012), mặc dù HS có thể nhận biết sự ổn định của tần suất thông qua các hoạt động thực nghiệm, các em vẫn gặp khó khăn trong việc hiểu xác suất lý thuyết như một mô hình giải thích cho sự ổn định đó. Tương tự, Ireland và Watson (2009) cho thấy HS thường xem xác suất thực nghiệm và xác suất lý thuyết như hai đối tượng tách biệt thay vì hai cách tiếp cận bổ sung cho cùng một hiện tượng ngẫu nhiên. Park và Kim (2023) cũng chỉ ra xu hướng HS dựa vào dữ liệu quan sát mà chưa huy động đầy đủ mô hình xác suất lý thuyết để giải thích kết quả.

Nhìn chung, mặc dù đã có nhiều nghiên cứu về khó khăn của HS trong học xác suất, các nghiên cứu xem xét những khó khăn này dưới góc nhìn sự kết nối giữa các không gian làm việc xác suất vẫn còn hạn chế.

3.1.2. Không gian làm việc toán học

Lý thuyết “Không gian làm việc toán học” (Mathematical Working Spaces - MWS) do Kuzniak và cộng sự (2016), Kuzniak (2022) phát triển nhằm mô tả cách cá nhân thực hiện công việc toán học trong quá trình giải quyết nhiệm vụ toán học. Theo lý thuyết này, một MWS được hiểu như một kết cấu khái niệm trừu tượng bao gồm hai mặt phẳng: (1) Mặt phẳng tri thức luận (epistemological plane); (2) Mặt phẳng nhận thức (cognitive plane), tương ứng với cấu trúc tri thức được thể chế hoá và cách người học vận hành công việc toán học.

Mặt phẳng tri thức luận liên quan đến bản chất và cấu trúc của tri thức toán học mà cá nhân (HS hoặc GV) đang tiếp cận. Ba thành phần tương tác cấu thành mặt phẳng này gồm có:

(1) Biểu diễn (Representamen): bao gồm các kí hiệu, hình vẽ, đồ thị hoặc mô hình được sử dụng để tiếp cận đối tượng toán học

(2) Tạo tác (Artifact): Là những đối tượng hoặc phương tiện hỗ trợ một cá nhân thao tác hoặc làm việc với các biểu diễn, bao gồm công cụ vật lý (compa, thước, máy tính,...), công cụ số (phần mềm) hay quy trình giải bài toán.

(3) Hệ quy chiếu lý thuyết (Referential): Là phần cốt lõi và nền tảng logic của toán học, bao gồm hệ thống định nghĩa, tính chất, định lý và quy tắc làm cơ sở cho lập luận và kiểm chứng toán học.

Ba thành phần này xác định “kết cấu tri thức” mà người học có thể huy động khi làm việc với một nhiệm vụ toán.

Mặt phẳng nhận thức là nơi diễn ra các thao tác, biểu diễn và lập luận cụ thể của người học khi giải quyết một vấn đề toán học. Mặt phẳng nhận thức của một cá nhân được tổ chức thành ba quá trình nhận thức cơ bản, tương ứng với ba thành phần tri thức luận:

(1) Hình dung trực quan (Visualization): đề cập đến khả năng mà một cá nhân giải mã, diễn giải và gán ý nghĩa cho các biểu tượng và biểu diễn toán học.

(2) Xây dựng (Construction): Xây dựng là quá trình trong đó người học sử dụng tạo tác để tạo ra hoặc xử lý các đối tượng toán học, như dựng một hình, tính một giá trị, tạo bảng dữ liệu mô phỏng,...

(3) Chứng minh (Proving): Đây là quá trình nhận thức cao nhất trong mặt phẳng này, bao gồm khả năng xây dựng lập luận có tính suy diễn, liên kết các phát biểu toán học theo hệ quy chiếu lý thuyết đã được công nhận.

Trong một MWS cho trước, công việc toán học của mỗi cá nhân được đặc trưng bởi ba quá trình hình thành: kí hiệu, công cụ và lập luận. Quá trình hình thành kí hiệu liên quan đến cách người học diễn giải, sử dụng các biểu diễn, cũng như sự chuyển đổi qua lại giữa các dạng biểu diễn. Quá trình hình thành công cụ liên quan đến cách người học sử dụng và điều khiển các tạo tác để xây dựng và giải quyết vấn đề toán học. Quá trình hình thành lập luận đề cập đến cách người học xây dựng các lập luận, giải thích, chứng minh dựa trên các định nghĩa, định lý, quy tắc toán học.

Khác với các khung năng lực toán học, MWS không hướng đến đánh giá năng lực mà tập trung phân tích cách HS huy động và điều phối các biểu diễn, công cụ và lập luận trong quá trình thực hiện hoạt động toán học.

3.1.3. Không gian làm việc xác suất thực nghiệm và không gian làm việc xác suất cổ điển

Dựa trên lý thuyết MWS và ý tưởng về các không gian làm việc kết nối của Minh và Lagrange (2016), chúng tôi đề xuất hai không gian làm việc xác suất thành phần:

(1) Không gian làm việc xác suất thực nghiệm (Frequentist Probability Working Space - FPWS) là không gian trong đó HS tiếp cận xác suất thông qua việc tạo sinh, xử lý và diễn giải dữ liệu thực nghiệm. Trong FPWS, các biểu diễn chủ yếu là tần số, tần suất và bảng dữ liệu; công cụ trung tâm là Excel và các hàm mô phỏng; hệ quy chiếu lý thuyết dựa trên quan niệm tần suất của xác suất.

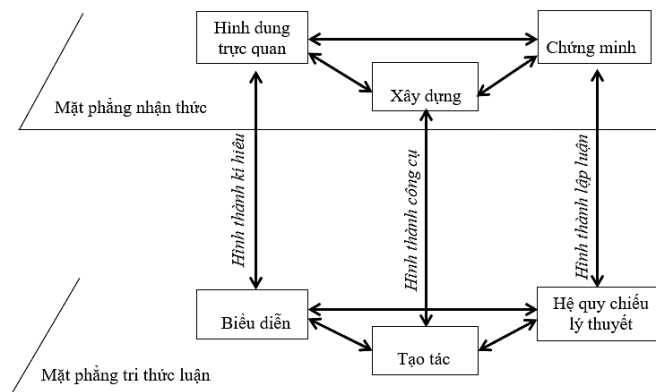
(2) Không gian làm việc xác suất cổ điển (Classical Probability Working Space - CPWS) là không gian trong đó HS xác định xác suất thông qua việc xây dựng không gian mẫu, xác định các trường hợp thuận lợi và vận dụng công thức xác suất cổ điển.

Việc học xác suất đòi hỏi HS không chỉ vận hành trong từng không gian riêng lẻ mà còn phải thiết lập được các kết nối giữa các không gian với nhau. Dưới góc nhìn của MWS, một khó khăn nhận thức có thể xuất hiện khi HS gặp trở ngại trong việc chuyển đổi giữa các biểu diễn xác suất như tần số, tần suất và xác suất; khi HS không thiết lập được mối liên hệ giữa dữ liệu thực nghiệm và mô hình lý thuyết; hoặc khi các quá trình hình thành kí hiệu, công cụ và lập luận phát triển không cân bằng. Trong nghiên cứu này, khó khăn nhận thức không được xem đơn thuần là các sai lầm hay hiểu lầm khái niệm mà được xem như những trở ngại xuất hiện trong quá trình HS kết nối và phối hợp giữa FPWS và CPWS.

3.2. Trường hợp nghiên cứu 1: cặp học sinh Khải - Trang

3.2.1. Quá trình kết nối giữa FPWS và CPWS

Trong quá trình thực hiện nhiệm vụ mô phỏng tung xúc xác bằng Excel, cặp Khải - Trang đã huy động đồng thời các thành phần của FPWS và CPWS. Ở FPWS, HS sử dụng hàm RANDBETWEEN và COUNTIF để mô phỏng các lần tung xúc xác và xác định số lần xuất hiện của từng mặt. Trên cơ sở đó, cặp HS tính được tần suất xuất hiện của từng kết quả trong 100, 300 và 500 lần mô phỏng.



Hình 1. Sơ đồ không gian làm việc toán học (Kuzniak và cộng sự, 2016)

▼  f _{jk} =COUNTIF(B1:B100,"1")				
B	C	D	E	
5		13		
1		8		
5		22		
5		21		
2		20		
2		16		

Mặt	1	2	3	4	5	6	Tổng tần suất
Tần suất trên 100 lần tung	$\frac{13}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{22}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{16}{100}$	1
Tần suất trên 300 lần tung	$\frac{53}{300}$	$\frac{46}{300}$	$\frac{66}{300}$	$\frac{37}{300}$	$\frac{55}{300}$	$\frac{43}{300}$	1
Tần suất trên 500 lần tung	$\frac{82}{500}$	$\frac{90}{500}$	$\frac{82}{500}$	$\frac{88}{500}$	$\frac{75}{500}$	$\frac{83}{500}$	1

Hình 3. Hình ảnh mô phỏng bằng Excel và bảng dữ liệu tần suất của cặp HS Khải - Trang
Ở CPWS, HS vận dụng công thức xác suất cổ điển để tính xác suất xuất hiện một mặt chẵn của xúc xắc cân bằng.

Trình bày cách tính xác suất xuất hiện một mặt có số chấm chẵn khi tung một con xúc xắc sáu mặt cân bằng đồng chất:

$$\begin{aligned} n(\Omega) &= 6, \quad n(A) = 3 \\ P(A) &= \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

Hình 4. Bài làm của cặp HS Khải - Trang trong CPWS

Thông qua việc so sánh các giá trị tần suất thu được từ mô phỏng với xác suất lí thuyết, cặp HS đã thiết lập được một mối liên hệ ban đầu giữa FPWS và CPWS. Cặp HS đã nhận thấy hiện tượng ổn định của tần suất khi số phép thử tăng lên, thể hiện qua trích đoạn phỏng vấn sau:

Nhà nghiên cứu: Em có nhận xét gì về tần suất xuất hiện của mỗi số khi tổng số lần mô phỏng lớn dần?

Khải - Trang: Dạ theo đó thì từ 100 đến 300 lần cũng như từ 300 đến 500 lần thì việc đầu tiên là số lần mà nó xuất hiện là nhiều hơn. Nhưng mà khi tính theo tỉ lệ tần suất thì cũng không có chênh lệch gì nhiều.

3.2.2. Phân tích theo bảng phân tích dữ liệu của MWS

Theo bảng 1, dữ liệu được phân tích lần lượt theo ba quá trình hình thành trong MWS gồm quá trình hình thành kí hiệu, quá trình hình thành công cụ và quá trình hình thành lập luận, từ đó nhận diện các khó khăn nhận thức tương ứng.

(1) *Quá trình hình thành kí hiệu:* Dữ liệu bài làm và phỏng vấn cho thấy Khải - Trang phân biệt đúng các biểu diễn này. HS sử dụng chính xác tần số để tính tần suất, xác định đúng xác suất lí thuyết của biến cố “xuất hiện mặt chẵn” và nhận biết tổng các tần suất bằng 1. Trong quá trình giải quyết nhiệm vụ không xuất hiện sự nhầm lẫn giữa các biểu diễn xác suất. Điều này cho thấy quá trình hình thành kí hiệu diễn ra tương đối ổn định và khó khăn trong phối hợp các biểu diễn xác suất chưa phải là trở ngại chủ yếu của cặp HS này.

(2) *Quá trình hình thành công cụ:* Cặp Khải - Trang sử dụng thành thạo các hàm RANDBETWEEN và COUNTIF để mô phỏng, xác định tần số và tính tần suất. Đáng chú ý, trong phỏng vấn, cặp HS nhiều lần nhấn mạnh rằng các kết quả thu được là “dữ liệu thực tế” do “chương trình thuật toán của Excel” tạo ra. Điều này cho thấy công cụ không chỉ được sử dụng để tính toán mà còn trở thành nguồn tham chiếu chính khi HS đánh giá độ tin cậy của kết quả. Nói cách khác, quá trình hình thành công cụ được kích hoạt rất mạnh trong FPWS.

(3) *Quá trình hình thành lập luận:* Khi được hỏi về mối quan hệ giữa tần suất và xác suất lí thuyết, Khải - Trang trả lời: “Dạ, đối với em thì giá trị tần suất theo kết quả mô phỏng chính xác hơn kết quả tính toán thông thường của mình. Bởi vì tần suất theo mô phỏng được lấy từ dữ liệu thực tế mà ta đã sử dụng chương trình thuật toán của Excel. Còn giá trị xác suất theo kết quả tính toán chỉ dùng lí thuyết nên độ chính xác sẽ không được đảm bảo”.

Lập luận này cho thấy HS chưa sử dụng xác suất cổ điển như hệ quy chiếu lí thuyết để giải thích kết quả mô phỏng. Thay vào đó, HS đánh giá độ chính xác dựa trên dữ liệu thực nghiệm. Theo MWS, điều này phản ánh quá trình hình thành lập luận chưa phát triển tương xứng với quá trình hình thành công cụ. Cặp HS đã thực hiện thành công các thao tác kĩ thuật trên công cụ để sinh ra dữ liệu, nhưng khi chuyển dịch sang quá trình lập luận để kiểm chứng mô hình lí thuyết trong CPWS, các em lại rơi vào trạng thái bầy thực nghiệm, coi dữ liệu mô phỏng từ thuật toán máy tính là “chính xác hơn” lí thuyết lí tính.

3.2.3. Nhận diện khó khăn nhận thức của cặp HS Khải - Trang

Đối chiếu với bảng phân tích dữ liệu theo MWS, cặp HS Khải - Trang bộc lộ hai dạng khó khăn nhận thức:

(1) Sự mất cân bằng giữa quá trình hình thành công cụ và quá trình hình thành lập luận: Excel hỗ trợ HS tạo dữ liệu và xử lí dữ liệu một cách chính xác, nhờ đó quá trình hình thành công cụ diễn ra thuận lợi. Tuy nhiên, HS chưa huy động được hệ quy chiếu lí thuyết của CPWS để giải thích ý nghĩa của dữ liệu mô phỏng. Dưới góc nhìn của MWS, khó khăn này phản ánh sự mất cân bằng giữa quá trình hình thành công cụ và quá trình hình thành lập luận.

(2) Sự chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm: Việc coi kết quả mô phỏng “chính xác hơn” xác suất lí thuyết cho thấy tham chiếu thực nghiệm trong FPWS đã lấn át tham chiếu lí thuyết của CPWS. Dữ liệu mô phỏng trở thành căn cứ chính để HS đưa ra kết luận, trong khi xác suất cổ điển không còn giữ vai trò giải thích. Đây là biểu hiện của sự chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm và cũng là nguyên nhân khiến quá trình kết nối giữa FPWS và CPWS chưa hoàn thiện.

Dưới góc nhìn của MWS, khó khăn của Khải - Trang không nằm ở việc sử dụng sai công cụ hay hiểu sai công thức xác suất, mà xuất hiện trong quá trình phối hợp giữa ba quá trình hình thành. HS vận hành hiệu quả trong FPWS nhờ công cụ mô phỏng nhưng chưa thiết lập được sự kết nối đầy đủ với hệ quy chiếu lí thuyết của CPWS. Vì vậy, công việc toán học của HS bị chi phối bởi dữ liệu thực nghiệm hơn là lập luận xác suất.

3.3. Trường hợp nghiên cứu 2: cặp học sinh Ngân - Phúc

3.3.1. Quá trình kết nối giữa FPWS và CPWS

Trong quá trình thực hiện nhiệm vụ mô phỏng tung xúc sắc bằng Excel trong FPWS, cặp HS Ngân - Phúc sử dụng các hàm RANDBETWEEN và COUNTIF để tạo dữ liệu ngẫu nhiên và xử lý dữ liệu mô phỏng. Bên cạnh đó, cặp HS cũng huy động CPWS để tính xác suất xuất hiện mặt chẵn của xúc sắc cân bằng dựa trên việc xác định số phần tử của biến cố thuận lợi và không gian mẫu.

Việc so sánh giữa kết quả mô phỏng và xác suất lí thuyết cho thấy cặp HS đã bước đầu thiết lập được sự kết nối giữa FPWS và CPWS. Tuy nhiên, quá trình kết nối này xuất hiện một số biểu hiện chưa ổn định, đặc biệt khi HS phải chuyển đổi giữa các biểu diễn xác suất và diễn giải ý nghĩa của các đại lượng xác suất.

Mặt	1	2	3	4	5	6	Tổng tần suất
Tần suất trên 100 lần tung	13	14	14	20	15	18	100
Tần suất trên 300 lần tung	51	53	51	43	50	52	300
Tần suất trên 500 lần tung	92	90	86	79	92	81	500

Trình bày cách tính tần suất xuất hiện một số chẵn trong 300 lần mô phỏng ở trên:

$$((13 + 14 + 14) : 300) = \frac{41}{300} \approx 0,136666...$$

Trình bày cách tính xác suất xuất hiện một mặt có số chấm chẵn khi tung một con xúc sắc sáu mặt cân bằng đồng chất:

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Hình 5. Bài làm của cặp HS Ngân - Phúc trong FPWS và CPWS

3.3.2. Phân tích theo bảng phân tích dữ liệu của MWS

(1) *Quá trình hình thành kí hiệu:* Ngay ở giai đoạn đầu của nhiệm vụ, khi được hỏi về tần suất xuất hiện số 1 sau 30 lần mô phỏng, Ngân trả lời: “Dạ bảy lần xuất hiện số 1”. Phát biểu này thực chất mô tả tần số, không phải tần suất. Chỉ sau khi Phúc giải thích: “Lấy 7 chia cho số lần tung là 7/30” nhóm mới điều chỉnh được câu trả lời.

Dữ liệu này cho thấy cặp HS gặp khó khăn trong việc phân biệt và chuyển đổi giữa hai biểu diễn có quan hệ chặt chẽ nhưng bản chất khác nhau là tần số và tần suất. Tuy nhiên, sau quá trình trao đổi, cặp HS đã điều chỉnh cách sử dụng các biểu diễn và tiếp tục hoàn thành các nhiệm vụ còn lại. Điều này cho thấy quá trình hình thành kí hiệu vẫn đang diễn ra nhưng chưa ổn định, đặc biệt ở giai đoạn chuyển đổi giữa các biểu diễn xác suất.

(2) *Quá trình hình thành công cụ:* Dữ liệu cho thấy cặp HS Ngân - Phúc sử dụng khá hiệu quả các công cụ Excel để thực hiện mô phỏng, nhận biết được chức năng của hàm RANDBETWEEN để tạo kết quả ngẫu nhiên; hàm COUNTIF để đếm số lần xuất hiện của các giá trị. Ngoài ra, HS cũng nhận thức được vai trò của Excel trong việc giảm khối lượng tính toán khi cho rằng “đếm bằng Excel thì nhanh hơn” và “rất là nhẹ nhàng”. Đối với cặp Ngân - Phúc, Excel được xem như phương tiện hỗ trợ mô phỏng và xử lý dữ liệu hơn là nguồn tạo ra các kết quả “chính xác hơn” lí thuyết. Do đó, quá trình hình thành công cụ ở trường hợp này diễn ra tương đối ổn định.

(3) *Quá trình hình thành lập luận:* Điểm nổi bật nhất của trường hợp Ngân - Phúc nằm ở quá trình điều chỉnh lập luận. Khi được hỏi về sự thay đổi của tần suất khi số lần mô phỏng tăng lên, Ngân ban đầu nhận định: “Nếu mô phỏng càng lớn thì tần suất xuất hiện càng lớn”. Phát biểu này phản ánh việc HS đồng nhất sự gia tăng của tần số với sự thay đổi của tần suất. Ngay sau đó, Phúc điều chỉnh “Tần số” và tiếp tục giải thích “Tần suất thì cũng xấp xỉ bằng nhau”.

Quá trình trao đổi này cho thấy lập luận của nhóm không hình thành ngay từ đầu mà được điều chỉnh thông qua tương tác giữa các thành viên. Đặc biệt, khi được yêu cầu so sánh tần suất với xác suất lí thuyết, cặp HS kết luận: “Xấp xỉ bằng nhau, chênh lệch không quá nhiều”. Khác với cặp Khải - Trang, cặp Ngân - Phúc đã bước đầu huy động hệ quy chiếu lí thuyết để giải thích dữ liệu thực nghiệm. Do đó, quá trình hình thành lập luận ở trường hợp này tương đối phù hợp với quá trình hình thành công cụ và không xuất hiện sự mất cân bằng rõ rệt giữa hai quá trình.

3.3.3. Nhận diện khó khăn nhận thức của cặp Ngân - Phúc

Theo bảng phân tích dữ liệu, khó khăn của cặp Ngân - Phúc xuất hiện chủ yếu ở quá trình hình thành kí hiệu. Tuy nhiên, sự nhầm lẫn này không phản ánh một chương ngại nhận thức sâu sắc về ý nghĩa của tần suất hay về xu

hướng hội tụ của tần suất khi số phép thử tăng lên, mà chủ yếu là một trở ngại mang tính kí hiệu học trong giai đoạn đầu của quá trình chuyển đổi giữa hai biểu diễn toán học có quan hệ chặt chẽ là tần số và tần suất. Việc khó khăn được khắc phục ngay trong quá trình trao đổi cho thấy HS đã có nền tảng khái niệm cần thiết nhưng chưa phối hợp linh hoạt các biểu diễn xác suất trong thời điểm ban đầu. Đáng chú ý, quá trình điều chỉnh này không diễn ra một cách cá nhân mà được hình thành thông qua tương tác nhóm. Chính quá trình trao đổi này đã đóng vai trò trung gian giúp cặp HS điều chỉnh cách hiểu và thống nhất về ý nghĩa của biểu diễn cần sử dụng. Dưới góc nhìn của MWS, đây là biểu hiện của quá trình hình thành lập luận đang hỗ trợ quá trình hình thành kí hiệu, qua đó thúc đẩy sự chuyển đổi từ công việc toán học mang tính cá nhân sang công việc toán học phù hợp với không gian làm việc mà GV thiết lập.

3.4. Tổng hợp các khó khăn nhận thức khi kết nối FPWS và CPWS

Đối chiếu kết quả phân tích của hai trường hợp nghiên cứu với ma trận phân tích dữ liệu (bảng 1), bảng 2 tổng hợp ba dạng khó khăn nhận thức nổi bật xuất hiện trong quá trình HS kết nối FPWS và CPWS.

Bảng 2. Tổng hợp các khó khăn nhận thức được nhận diện theo khung phân tích MWS

Dạng khó khăn	Biểu hiện	Minh chứng
Khó khăn trong phối hợp các biểu diễn xác suất	Nhầm lẫn hoặc chuyển đổi chưa linh hoạt giữa tần số, tần suất và xác suất	Ngân - Phúc
Mất cân bằng giữa quá trình hình thành công cụ và lập luận	Sử dụng thành thạo Excel nhưng chưa giải thích được mối quan hệ giữa tần suất và xác suất lí thuyết	Khải - Trang
Sự chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm	Xem kết quả mô phỏng đáng tin cậy hơn xác suất lí thuyết	Khải - Trang

Bảng 2 cho thấy ba dạng khó khăn nhận thức không tồn tại tách biệt mà phản ánh những trở ngại trong quá trình phối hợp giữa ba quá trình hình thành của MWS khi HS kết nối FPWS và CPWS. Dưới góc nhìn MWS, đây chính là những biểu hiện của sự mất cân bằng hoặc đứt gãy trong quá trình HS phối hợp các thành phần của công việc toán học khi giải quyết các nhiệm vụ xác suất.

4. Kết luận và bình luận

Nghiên cứu sử dụng lí thuyết MWS để phân tích những khó khăn nhận thức của HS trong quá trình kết nối giữa FPWS và CPWS thông qua mô phỏng với Excel. Ba dạng khó khăn nổi bật được nhận diện gồm: (1) Khó khăn trong phối hợp các biểu diễn xác suất (tần số, tần suất và xác suất); (2) Sự mất cân bằng giữa quá trình hình thành công cụ và lập luận; (3) Sự chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm khi HS kết nối FPWS và CPWS. Các khó khăn này phản ánh những trở ngại trong quá trình HS phối hợp các biểu diễn, công cụ và lập luận khi giải quyết nhiệm vụ xác suất.

Phân tích dữ liệu cho thấy mô phỏng với Excel có vai trò hai mặt trong dạy học xác suất: (1) Công nghệ tạo điều kiện để HS thực hiện số lượng lớn phép thử ngẫu nhiên, quan sát sự ổn định của tần suất và thiết lập cầu nối giữa dữ liệu thực nghiệm với xác suất lí thuyết; (2) Nếu thiếu các hoạt động định hướng lập luận, HS dễ xem dữ liệu mô phỏng là nguồn tham chiếu đáng tin cậy hơn mô hình xác suất cổ điển. Kết quả này phù hợp với các nghiên cứu của Kazak và Pratt (2021), Pfannkuch và cộng sự (2016), Prodromou (2012), đồng thời cho thấy công nghệ không tự động dẫn đến sự hình thành hiểu biết xác suất nếu thiếu sự hỗ trợ của lập luận toán học. Nhận định này cũng phù hợp với xu hướng nghiên cứu gần đây, trong đó nhấn mạnh vai trò trung gian của thiết kế sư phạm và quá trình lập luận của người học trong việc khai thác hiệu quả công nghệ trong dạy học Toán (Burgos và cộng sự, 2025).

Nghiên cứu này cũng chỉ ra đóng góp của lí thuyết MWS không chỉ nằm ở việc nhận diện HS làm sai, mà còn ở khả năng giải thích bản chất cấu trúc của những khó khăn đó. Dưới góc nhìn MWS, khó khăn nhận thức được xem là hệ quả của sự mất cân bằng hoặc đứt gãy trong quá trình phối hợp giữa ba quá trình hình thành: kí hiệu, công cụ và lập luận, khi HS chuyển đổi giữa FPWS và CPWS. Cách tiếp cận này giúp lí giải vì sao những HS sử dụng thành thạo công cụ mô phỏng vẫn có thể gặp khó khăn khi diễn giải ý nghĩa xác suất hoặc thiết lập mối liên hệ giữa dữ liệu thực nghiệm và mô hình xác suất lí thuyết.

Từ các kết quả trên, nghiên cứu gợi ý một số hàm ý sư phạm cho dạy học xác suất ở trường phổ thông: Thứ nhất, đối với khó khăn trong phối hợp các biểu diễn xác suất, GV cần thiết kế các nhiệm vụ yêu cầu HS chuyển đổi và so sánh thường xuyên giữa tần số, tần suất và xác suất, đồng thời giải thích ý nghĩa của từng biểu diễn. Thứ hai, để khắc phục sự mất cân bằng giữa quá trình hình thành công cụ và quá trình hình thành lập luận, GV cần tổ chức các câu hỏi giải thích, dự đoán và biện minh sau mỗi lần mô phỏng. Điều này giúp HS chuyển từ thao tác kĩ thuật sang lập luận xác suất, qua đó kết nối kết quả mô phỏng với mô hình xác suất cổ điển. Thứ ba, để hạn chế sự chiếm ưu thế của tham chiếu thực nghiệm, GV cần tổ chức các hoạt động buộc HS chuyển đổi qua lại giữa FPWS và CPWS. Hoạt động này giúp HS nhận thức rõ vai trò của xác suất lí thuyết như một mô hình giải thích cho dữ liệu thực nghiệm, thay vì xem dữ liệu mô phỏng là cơ sở duy nhất để đưa ra kết luận.

Nghiên cứu vẫn còn một số hạn chế cần được xem xét. Trước hết, dữ liệu phân tích chỉ tập trung vào hai trường hợp điển hình trong một tình huống mô phỏng xác suất với xúc xắc sáu mặt. Bên cạnh đó, nghiên cứu mới xem xét

việc sử dụng Excel như một công cụ mô phỏng nên chưa cho phép đánh giá sự khác biệt khi sử dụng các môi trường công nghệ khác. Các nghiên cứu tiếp theo có thể mở rộng phạm vi sang nhiều tình huống và nội dung xác suất khác nhau, kết hợp đa dạng công cụ công nghệ và các cấp học, đồng thời tăng số lượng trường hợp nghiên cứu để kiểm chứng sâu hơn khả năng của MWS trong phân tích quá trình HS kết nối các không gian làm việc xác suất.

Tuyên bố về vai trò của các tác giả: Trần Kiêm Minh: Xây dựng ý tưởng nghiên cứu, giám sát và chỉ đạo quá trình nghiên cứu, chỉnh sửa và phân biên bản thảo. Nguyễn Thị Sinh: Xây dựng ý tưởng nghiên cứu, thiết kế phương pháp nghiên cứu, thực hiện nghiên cứu và thu thập dữ liệu, phân tích dữ liệu, viết bản thảo ban đầu. Trần Kiêm Minh, Nguyễn Thị Sinh: Thảo luận kết quả nghiên cứu, chỉnh sửa và hoàn thiện bản thảo cuối cùng.

Tuyên bố về GenAI và Quyền tác giả: Trong quá trình chuẩn bị bản thảo này, các tác giả đã sử dụng ChatGPT (OpenAI, GPT-5.5) để hỗ trợ chỉnh sửa ngôn ngữ, rà soát cấu trúc và thảo luận một số ý tưởng học thuật. Công cụ trí tuệ nhân tạo không được sử dụng để tạo lập dữ liệu, phân tích dữ liệu hoặc đưa ra các kết luận khoa học của nghiên cứu.

Tuyên bố về xung đột lợi ích: Các tác giả tuyên bố không có xung đột lợi ích.

Tài liệu tham khảo

- Artigue, M. (2014). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. In A. Bikner-Ahsbabs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 467-496). New York : Springer.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3_1
- Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., & Cotrado, B. (2025). A guide to the analysis of didactic suitability of probability textbook lessons. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(4), em0858. <https://doi.org/10.29333/iejme/17183>
- English, L. D., & Watson, J. (2016). Development of probabilistic understanding in fourth grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(1), 28-62. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.1.0028>
- Fischer, M. (2026). Developing probability competences through the implementation and exploration of random walk simulations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 57(5), 870-883. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2493958>
- Ireland, S., & Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 339-370. <https://doi.org/10.29333/iejme/244>
- Kazak, S., & Pratt, D. (2021). Developing the role of modelling in the teaching and learning of probability. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 113-133. <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1802328>
- Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces - Theoretical Characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context*, 18, (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48, 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM - Mathematics Education*, 48, 793-807. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0774-z>
- Park, J., & Kim, D. W. (2023). Facilitating factors and obstacles in the coordination of theoretical probability and relative frequency estimates of probability. *Educational Studies in Mathematics*, 114, 439-460. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10253-w>
- Parzysz, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, 74, 91-103.
- Pfannkuch, M., Chance, B., Roy, S., & Cordani, L. (2016). Discussion of "Probability modelling and thinking": What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 11-37. <https://doi.org/10.52041/serj.v15i2.239>
- Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM - Mathematics Education*, 44, 855-868. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0469-z>