

## SUY LUẬN KHÔNG GIAN CỦA HỌC SINH LỚP 9 VỀ CÁC BIỂU DIỄN HAI CHIỀU TRONG HÌNH LẬP PHƯƠNG

Nguyễn Thị Tân An<sup>1,+</sup>  
Trần Thị Ngọc Hà<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế;

<sup>2</sup>Phòng Giáo dục và Đào tạo thành phố Đông Hà, tỉnh Quảng Trị

+ Tác giả liên hệ • Email: [tanan0704@gmail.com](mailto:tanan0704@gmail.com)

### Article history

Received: 15/6/2023

Accepted: 11/7/2023

Published: 05/8/2023

### Keywords

Spatial reasoning, spatial visualization, spatial analysis, cube, geometry

### ABSTRACT

The study was conducted with 50 grade 9 students, using 8 questions related to the vertex and the side length of the cube to evaluate the students' spatial reasoning about two-dimensional representations, focusing on spatial analysis reasoning and spatial visualization reasoning. The spatial reasoning shown in the students' answers was quantified in the study. The results show that the students' spatial reasoning was above average but not high. The proportion of students answering based on visual observations was still high. Most students used spatial analysis reasoning or a combination of spatial visualization and spatial analysis reasoning, but rarely used only spatial visualization reasoning to solve. Students' reasoning about individual vertex or line segments is better than reasoning about problems that combine both.

### 1. Mở đầu

Toán học là một trong những môn học giúp HS phát triển tư duy và suy luận. Ở cấp THCS, mặc dù hình học phẳng thường được ưu tiên hơn hình học không gian nhưng hầu hết các chương trình giảng dạy ở nhà trường đều nhằm mục đích phát triển sự hiểu biết của HS về hình học không gian (Gutiérrez và cộng sự, 2004). Thực tế cho thấy, nhiều HS lên lớp 9 vẫn gặp khó khăn trong việc hiểu các khái niệm của hình học cũng như hình thành và phát triển suy luận hình học, đặc biệt là suy luận trong không gian thông qua mối quan hệ không gian giữa các đối tượng. Do đó, trong nghiên cứu này, chúng tôi tìm hiểu cách HS sử dụng các suy luận không gian để giải thích các bài toán liên quan đến biểu diễn hai chiều của các hình trong không gian, cụ thể là hình lập phương.

Trong hình học, các hình thường ở dạng hình vẽ (trên giấy, trên bảng hoặc màn hình máy tính) và làm việc với các biểu diễn như vậy (bao gồm các hình hình học do HS tưởng tượng) là rất quan trọng trong quá trình suy luận hình học (Lowrie, 2012; Fujita và cộng sự, 2017). Khi làm việc với các bài toán liên quan đến biểu diễn hai chiều (2-chiều) của các hình không gian, HS sử dụng các kỹ năng suy luận khác nhau để giải quyết vấn đề. Mulligan và cộng sự (2018) cho rằng suy luận không gian bao gồm các kỹ năng liên quan đến các thao tác tư duy đối với các biểu diễn, chuyển đổi các hình không gian thành các dạng trực quan khác dựa trên phân tích các đặc điểm cấu trúc của hình. Đồng thời, các nghiên cứu cũng gợi ý rằng suy luận không gian có thể được cải thiện thông qua quá trình học tập và rèn luyện (Lowrie và cộng sự, 2018).

Nhiều nghiên cứu đã nhấn mạnh vai trò của các biểu diễn trực quan trong việc dạy và học hình học. Tuy nhiên, Duval (1998) cho rằng các biểu diễn trực quan có thể hỗ trợ cho quá trình suy luận hình học nhưng cũng có thể là một trở ngại, đặc biệt là trong trường hợp hình học không gian nếu HS không có khả năng tưởng tượng và phân tích các biểu diễn của các hình trong không gian ba chiều (3-chiều). Không gian hình học và không gian biểu diễn là khác nhau về bản chất, và do đó có các tính chất khác nhau.

Ở Việt Nam đã có một số nghiên cứu liên quan đến suy luận không gian của HS THCS. Chẳng hạn, tác giả Nguyễn Thị Hồng Thủy (2018) đã đánh giá 5 loại suy luận không gian của HS THCS theo các mức độ suy luận của Van Hiele. Tác giả Trần Sỹ Nhân (2023) tập trung phân tích suy luận không gian về hình trải và diện tích xung quanh của HS lớp 9. Hầu như chưa có nghiên cứu nào liên quan đến việc phân tích suy luận không gian của HS về các biểu diễn hai chiều trong các hình ba chiều.

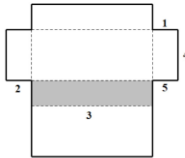
Nghiên cứu hướng đến trả lời các câu hỏi sau: (1) Suy luận không gian của HS lớp 9 về các biểu diễn hai chiều trong hình lập phương được thể hiện như thế nào? (2) Những khó khăn nào HS gặp phải khi suy luận về các biểu diễn hai chiều trong hình lập phương? (3) Từ kết quả nghiên cứu, các đề xuất sư phạm nào trong việc thiết kế nhiệm vụ và thực hiện dạy học giúp cải tiến suy luận không gian của HS lớp 9 về các biểu diễn hai chiều trong hình lập phương.

## 2. Kết quả nghiên cứu

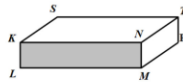
### 2.1. Suy luận không gian

*Suy luận hình học* là việc sử dụng các hệ thống khái niệm và tính chất để khảo sát hình dạng và không gian (Battista, 2007). *Suy luận không gian* (spatial reasoning) là khả năng nhận biết, tạo ra, kiểm tra, thực hiện và phản ánh về các đối tượng, hình ảnh, mối quan hệ, chuyển động và biến đổi không gian (Clement & Battista, 1992). Hai thành phần chính của suy luận không gian - là tưởng tượng và phân tích không gian (Hegarty, 2010).

Suy luận tưởng tượng không gian (Spatial visualization reasoning) liên quan đến việc hình dung và điều khiển hình ảnh của các đối tượng trong không gian trong trí tưởng tượng, từ các góc nhìn cố định hoặc thay đổi về các đối tượng, để có thể suy luận về các đối tượng và hành động trên chúng (Battista, 2007). Tưởng tượng không gian cho phép dự đoán điều gì sẽ xảy ra khi thực hiện các hành động trên các đối tượng không gian. Tưởng tượng không gian bao gồm tưởng tượng chuyển động quay của các đối tượng trong không gian 2-chiều và 3-chiều, tưởng tượng các đối tượng trông như thế nào từ các góc nhìn khác nhau, cách các hình 2-chiều có thể được gấp lại để tạo thành các hình 3-chiều và ngược lại, tưởng tượng một đối tượng 3-chiều từ các hình chiếu trực giao của nó và ngược lại, đồng thời phân tách và sắp xếp lại các hình một cách trực quan. Chẳng hạn, hình 1 cho thấy làm thế nào để một mảnh giấy có thể được cắt và gấp lại tạo thành một hình hộp. Các đường chấm chấm cho thấy nơi mảnh giấy được gấp lại. Hãy cho biết các cạnh (chữ cái) ở hình hộp tương ứng với các cạnh được đánh số nào ở hình khai triển.



Hình 1. Khai triển hình hộp



Hình 2. Hình chóp đều có đáy là hình vuông

Trước hết, HS cần hình dung ra đoạn “3” ở hình khai triển sẽ tương ứng với cạnh LM (hoặc KN) ở hình hộp. Từ đó tiếp tục tưởng tượng để nhận ra nếu đoạn “3” ứng với cạnh KN thì đoạn “1”, “2”, “4”, “5” tương ứng với các cạnh TP, KL, NT, NM.

Suy luận phân tích không gian (spatial analytic reasoning) liên quan đến việc phân tách một đối tượng (hoặc tập hợp các đối tượng) trong không gian thành các phần nhỏ bằng cách sử dụng các tính chất hình học để chỉ ra các phần đó liên quan với nhau như thế nào và sử dụng các mối quan hệ trên các phần nhỏ này để trả lời câu hỏi về tổng thể. Trong hình học không gian, khi phân tích thường sử dụng các khái niệm như độ dài, góc, diện tích và thể tích, bằng nhau, song song và đẳng cự để khái niệm hóa mối quan hệ không gian giữa các hình, giải thích các tính chất hình học. Chẳng hạn, hình 2 là hình biểu diễn của một hình chóp đều có đáy là hình vuông. Khi đó, đáy hình vuông của hình chóp có thể được biểu diễn bởi một hình bình hành, góc được đánh dấu trên hình vẽ là góc vuông vì các mặt bên của hình chóp là tam giác cân nên đường trung tuyến vừa là đường cao, ngoài ra đường cao này không cắt đường chéo của đáy hình chóp, mặc dù chúng có vẻ như cắt nhau vì tính trong suốt của hình biểu diễn.

Trong giải quyết các vấn đề hình học, tưởng tượng và phân tích không gian thường được sử dụng đồng thời hoặc tuần tự. Như vậy, có thể nói rằng suy luận không gian liên quan đến sự hiểu biết về ba thuộc tính: (1) nhận thức về không gian, chẳng hạn như khoảng cách và các chiều; (2) biểu diễn thông tin không gian (bên trong tâm trí và bên ngoài dưới dạng hình vẽ); và (3) lập luận liên quan đến việc giải thích và vận dụng thông tin không gian để giải quyết vấn đề và ra quyết định.

### 2.2. Các kiểu suy luận trong học hình học không gian

Theo Pittalis và Christou (2010), các kiểu suy luận của HS khi học hình học không gian là: - Biểu diễn và chuyển đổi giữa các dạng biểu diễn của các đối tượng hình học không gian, ví dụ như vẽ các mặt (mặt trên, mặt bên, mặt dưới) từ hình biểu diễn của các hình đa diện và ngược lại; - Nhận biết và xây dựng hình khai triển từ hình biểu diễn của các hình trong không gian như hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình lăng trụ đứng, hình chóp, hình trụ, hình nón...; - Xây dựng các hình khối trong không gian từ các hình lập phương; - Nhận ra đặc trưng và tính chất hình học của các hình trong không gian, so sánh và phân biệt giữa các hình đó; - Tính thể tích và diện tích xung quanh, diện tích toàn phần các hình khối.

Năm kiểu suy luận được đề cập ở trên có liên quan chặt chẽ với các suy luận không gian như trực quan hóa không gian, định hướng không gian (ví dụ: không bị nhầm lẫn khi thay đổi hướng) hoặc các mối quan hệ không gian (ví

dự: quay các đối tượng trong tưởng tượng) (Lowrie et al., 2018). Trong nghiên cứu này, chúng tôi đặc biệt tập trung vào các khả năng liên quan đến thao tác bên trong/bên ngoài các hình dạng 3-chiều và suy luận với các tính chất hình học, bởi vì suy luận hình học được đặc trưng bởi sự tương tác giữa hai khía cạnh trực quan (hình) và khái niệm (Duval, 2017). Các cách biểu diễn khác nhau của các hình hình học thường liên quan đến việc mã hóa thông tin các khái niệm (Lowrie, 2012).

Trong nghiên cứu này, chúng tôi tập trung vào hai suy luận không gian sau đây để giải quyết vấn đề về các biểu diễn 2 chiều trong không gian: - Tưởng tượng không gian (mã hóa): thao tác trên các hình ảnh trực quan của hình 3-chiều bao gồm quay, biến đổi hình đã cho sang dạng khác, định hướng lại, vẽ thêm các đường bổ sung; - Phân tích không gian dựa trên thuộc tính (giải mã): diễn giải các yếu tố cấu trúc của hình 3-chiều và phân tách các đối tượng thành các thành phần của chúng bằng các thuộc tính hình học để lập luận và ra quyết định.

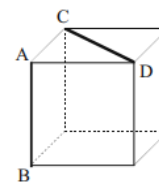
Theo Mesquita (1998), các biểu diễn bên ngoài có thể dẫn đến một số hiểu lầm về các mối quan hệ hình học cụ thể có thể xuất hiện như là “hiển nhiên” đối với HS. Với một biểu diễn hình học không gian cụ thể, HS có thể không nhận ra các tính chất hình học bởi vì các biểu diễn không xuất hiện dưới dạng quen thuộc đối với HS. Như vậy, một biểu diễn có thể trở thành một “chướng ngại” đối với sự hiểu biết của HS.

### 2.3. Các mức độ suy luận không gian

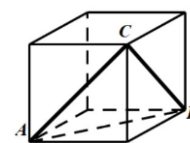
Nghiên cứu của Fujita và cộng sự (2017) đã chia suy luận không gian trong bài làm của HS thành 5 mức độ, được mô tả như sau:

- Mức độ 1: Câu trả lời không chính xác dựa trên các nhận định hoàn toàn trực quan hoặc hai chiều mà không sử dụng bất kỳ tưởng tượng không gian và phân tích không gian nào;
- Mức độ 2a: Câu trả lời không chính xác, dựa trên phân tích không gian nhưng thiếu logic hoặc bị ảnh hưởng bởi thông tin trực quan và/hoặc kiến thức không chính xác/không phù hợp;
- Mức độ 2b: Câu trả lời không chính xác, dựa trên tưởng tượng không gian nhưng thiếu logic hoặc bị ảnh hưởng bởi thông tin trực quan và/hoặc kiến thức không chính xác/không phù hợp;
- Mức độ 3: Câu trả lời không chính xác dựa trên phân tích không gian và tưởng tượng không gian nhưng thiếu logic hoặc bị ảnh hưởng bởi thông tin trực quan và/hoặc kiến thức không chính xác/không phù hợp;
- Mức độ 4: câu trả lời đúng dựa trên phân tích không gian và / hoặc tưởng tượng không gian với các kiến thức chính xác.

Sự phân loại này cho phép chúng tôi xác định được suy luận không gian, thể hiện trong các câu trả lời của HS. Ví dụ, đối với yêu cầu so sánh độ dài hai đoạn thẳng AB và CD trong hình lập phương (hình 3), một HS trả lời “ $AB > CD$ ” và không giải thích thì được xếp vào mức độ 1. Nếu một HS cho rằng “trong hình lập phương, các đường chéo của mỗi mặt đều bằng nhau, do đó tam giác ABC trong hình 4 là tam giác đều”, mặc dù tam giác ABC không giống như một tam giác đều HS được học trong hình học phẳng. Câu trả lời này được xếp vào mức độ 4 vì câu trả lời hoàn toàn chính xác, HS đã nhận ra ABC là một tam giác với độ dài các cạnh là bằng nhau vì chúng là đường chéo của các hình vuông bằng nhau. Hoặc nếu gọi  $a$  là độ dài cạnh của hình lập phương thì tam giác ABC có độ dài ba cạnh đều bằng  $a\sqrt{2}$ . HS khác có thể suy luận “ $CA = CB$  vì chúng là các đường chéo của các hình vuông” và kết luận rằng ABC là một tam giác cân nhưng không có thao tác suy luận nào được sử dụng với cạnh AB. Ở câu trả lời này mặc dù HS đã sử dụng tưởng tượng không gian và phân tích không gian nhưng chưa đầy đủ nên kết quả chưa chính xác, do đó câu trả lời được xếp vào mức độ 3.



Hình 3



Hình 4

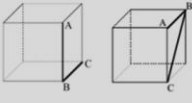
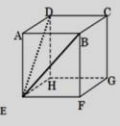
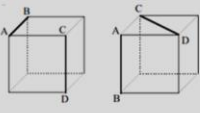
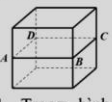
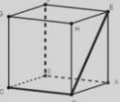
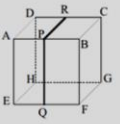
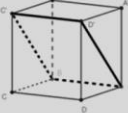
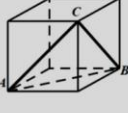
### 2.4. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu được thực hiện đối với 50 HS lớp 9 tại Trường THCS Nguyễn Du, TP. Đông Hà vào tháng 10/2022. Ở thời điểm nghiên cứu, các em đã học xong chương trình hình học không gian của Toán lớp 8 và đang học đầu năm lớp 9. Lúc này, HS đã có nhiều kinh nghiệm học tập liên quan đến kiến thức cơ bản về các hình khối trong không gian bao gồm hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình lăng trụ đứng, hình chóp, hình chóp cụt cũng như các mối quan hệ giữa hai đường thẳng song song, hai mặt phẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc. Bên cạnh đó, HS cũng đã được học đầy đủ những khái niệm và tính chất của các hình hình học phẳng như tam giác (đều, cân, thường, vuông), tứ giác (hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành). Với các câu hỏi trong nghiên cứu này, HS không chứng minh nhưng được khuyến khích giải thích cho câu trả lời của mình.

Công cụ nghiên cứu là 1 phiếu khảo sát gồm 8 câu hỏi tự luận liên quan đến độ lớn của góc và độ dài các đoạn thẳng trong hình lập phương (hình 5). Một số câu hỏi của phiếu khảo sát được điều chỉnh từ nghiên cứu của Fujita và cộng sự (2020). Mục đích của phiếu khảo sát là để đánh giá, nhận xét, phân tích suy luận không gian của HS lớp 9 về các biểu diễn hai chiều trong hình lập phương. Thông qua đó, đưa ra các biện pháp giúp cải tiến suy luận không gian của HS nói chung và suy luận không gian về các biểu diễn hai chiều trong hình lập phương nói riêng.

Khảo sát được tiến hành trong 1 buổi với thời gian làm bài là 90 phút. HS giải quyết các câu hỏi trong phiếu khảo sát theo cá nhân, một cách độc lập và không có sự trao đổi, thảo luận hay bất kì gợi ý nào từ phía GV.

Dữ liệu thu thập bao gồm 50 bài làm cá nhân của HS, trả lời cho các câu hỏi từ phiếu khảo sát. Phương pháp định tính và định lượng được sử dụng để xử lí, phân tích, giải thích dữ liệu thu được. Quá trình phân tích định tính tập trung vào việc phân tích câu trả lời của HS theo các biểu hiện về suy luận không gian. Phân tích định lượng thực hiện dựa trên thống kê kết quả đánh giá suy luận không gian, phân tích số liệu và rút ra các kết luận dựa trên các số liệu đó.

<p><b>Câu A1.</b> Hãy tìm độ lớn của góc <math>\widehat{ABC}</math> trong mỗi hình lập phương sau đây. Giải thích.</p> 	<p><b>Câu A2.</b> Hãy tìm độ lớn của góc <math>\widehat{BED}</math> trong hình lập phương sau đây. Giải thích.</p> 	<p><b>Câu B1.</b> Trong mỗi hình lập phương sau, đoạn thẳng nào dài hơn, AB hay CD? Giải thích.</p> 	<p><b>Câu B3.</b> Trong hình lập phương dưới đây, tứ giác ABCD là hình gì, biết A, B, C &amp; D là trung điểm của mỗi cạnh? Giải thích.</p> 
<p><b>Câu A3.</b> Hãy tìm độ lớn của góc <math>\widehat{CDE}</math> trong hình lập phương sau đây. Giải thích.</p> 	<p><b>Câu A4.</b> P, Q và R là trung điểm của AB, EF và DC trong hình lập phương sau. Tìm độ lớn của góc <math>\widehat{RPQ}</math>. Giải thích.</p> 	<p><b>Câu B2.</b> Trong hình lập phương dưới đây, tứ giác <math>ABC'D'</math> là hình gì? Giải thích.</p> 	<p><b>Câu B4.</b> Trong hình lập phương dưới đây, tam giác ABC có gì đặc biệt? Giải thích.</p> 

Hình 5. Nội dung phiếu khảo sát

Trong nghiên cứu này, để đánh giá suy luận không gian của HS khi giải quyết các nhiệm vụ liên quan đến biểu diễn hai chiều trong hình lập phương, chúng tôi sử dụng thang đo 5 mức độ của Fujita và cộng sự (2017) đã trình bày ở phần trước. Ngoài ra, chúng tôi cũng cụ thể hóa các mức độ theo thang điểm 4 như sau:

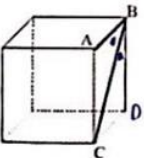
Bảng 1. Điểm số tương ứng với các mức độ suy luận không gian

Không trả lời	Mức độ 1	Mức độ 2a / 2b	Mức độ 3	Mức độ 4
0 điểm	1 điểm	2 điểm	3 điểm	4 điểm

2.5. Kết quả nghiên cứu

\* Các câu hỏi về độ lớn của góc trong hình lập phương

b.



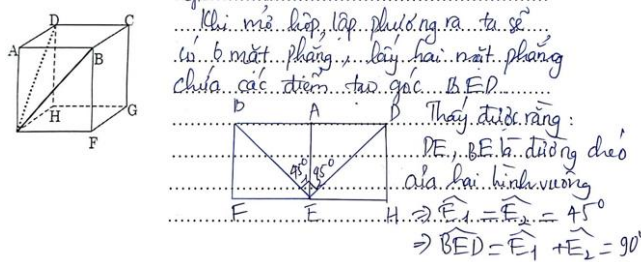
...Ta có: ... ABCD... là hình vuông... (là ABCD là 1 mặt của hình lập phương)...  
 => BC... là đường phân giác của hình vuông ABCD...  
 =>  $\widehat{ABC} = 45^\circ$

Hình 6

Số HS suy luận đúng trong câu A1a là 50/50 và ở câu A1b là 38/50. Với câu A1a, 100% HS đều nhận ra các mặt của hình lập phương là hình vuông nên góc  $\widehat{ABC}$  là góc vuông. Với câu A1b, HS sử dụng tính chất tia phân giác của góc vuông hoặc tính chất tam giác vuông cân trong mặt bên để tìm số đo của góc  $\widehat{ABC}$  (hình 5).

Câu A2 đòi hỏi HS phải xác định số đo của một góc trong không gian, nhưng không thuộc một mặt của hình lập phương. Câu hỏi này khó hơn câu A1, vì thế chỉ có 6/50 em suy luận đúng dựa vào tam giác BED đều, 38/50 em trả lời chưa đúng và 6/50 em để trống chưa có câu trả lời. Phần lớn HS nhìn tia ED là tia phân giác của góc  $\widehat{AEB}$  nên  $\widehat{DEB} = \frac{1}{2}\widehat{AEB}$  (cách nhìn phẳng) hoặc cho rằng trong không gian góc  $\widehat{BED}$  được hợp thành bởi  $\widehat{BEA}$  và  $\widehat{DEA}$  nên  $\widehat{BED} = \widehat{AEB} + \widehat{AED}$  (phân tích không đúng). Hình 6 là một minh họa bài làm của HS đạt mức 3. HS đã vẽ hình khai triển của hình lập phương ban

đầu và tính đúng góc  $\widehat{BED}$  trên hình trái phẳng, tuy nhiên góc này không bằng góc  $\widehat{BED}$  trong hình lập phương. Như vậy mặc dù HS đã sử dụng tương tự và phân tích không gian nhưng không chính xác.



Hình 7

Câu A3 yêu cầu HS xác định độ lớn của một góc trong không gian, mà hai cạnh của góc thuộc hai mặt của hình lập phương. Chỉ có 1/50 em suy luận đúng, 47/50 em suy luận sai và 2/50 em để trống không có câu trả lời. Nhiều HS bị ảnh hưởng bởi yếu tố trực quan nên cho rằng các cạnh  $DC, DH, DE$  cùng thuộc một mặt phẳng và tia  $DH$  nằm giữa hai tia còn lại. Vì vậy, HS đã tính độ lớn  $\widehat{CDE}$  bằng tổng của góc  $\widehat{CDH}$  và  $\widehat{HDE}$ . Một số HS nhận ra tứ giác  $CDEF$  là hình chữ nhật nhưng các em chỉ mới chứng minh được  $CDEF$  là hình bình hành. Chẳng hạn HS ở hình 8 nhận định độ lớn  $\widehat{CDE}$  dựa vào hình ảnh trực quan mà không dùng suy luận không gian nên câu trả lời đạt mức 1.

Đối với câu A4 có 6/50 HS suy luận đúng, 32/50 HS suy luận sai, 12/50 HS chưa có câu trả lời. Phần lớn HS cố gắng chứng minh  $\widehat{RPQ} = \widehat{EAD} = 90^\circ$  hoặc tứ giác  $PRNQ$  là hình vuông ( $N$  là trung điểm  $HG$ ) hoặc tam giác  $PQR$  là tam giác vuông. Tuy nhiên trong quá trình suy luận các em đưa ra những nhận định thiếu cơ sở (lớp 8 chưa được học), ví dụ hai mặt phẳng  $ABCD$  và  $ABFE$  vuông góc nên các góc tạo bởi từ hai mặt phẳng đó sẽ vuông góc, nghĩa là góc  $\widehat{RPQ} = 90^\circ$  (hình 9).

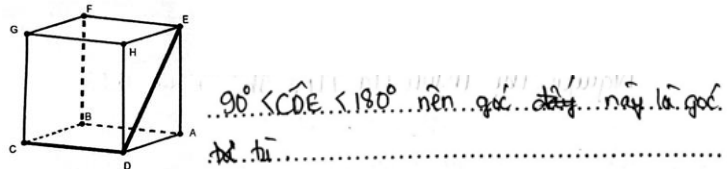
**\* Các câu hỏi về độ dài của đoạn thẳng trong hình lập phương**

Câu B1a yêu cầu HS so sánh các đoạn thẳng không cùng nằm trong một mặt của

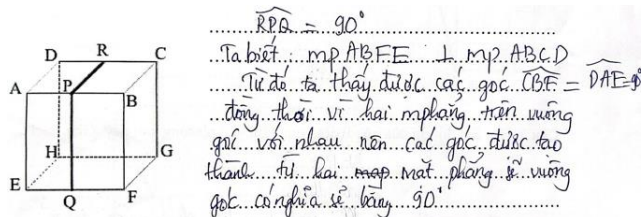
hình lập phương, có 39/50 em trả lời đúng, 9/50 em trả lời sai, 2/50 em không có câu trả lời. Một số ít HS trực tiếp nhận ra đây là hai cạnh của hình lập phương nên chúng bằng nhau, phần lớn HS sử dụng tính chất các cạnh đối song song và bằng nhau của hình vuông để chuyển độ dài 2 đoạn thẳng được cho về 2 cạnh của cùng một hình vuông để so sánh. Bên cạnh đó vẫn có một số HS dựa vào trực giác nên đã trả lời sai.

Đối với câu B1b, có 14/50 HS trả lời đúng, 29/50 HS trả lời sai, 7/50 HS để trống chưa có câu trả lời. Đây cũng là câu hỏi yêu cầu so sánh các đoạn thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng, nhưng  $CD$  không phải là cạnh của hình lập phương. HS chỉ cần so sánh trực tiếp dựa vào tính chất hình lập phương hoặc đưa về so sánh 2 đoạn thẳng trong cùng một hình vuông. Tuy nhiên vẫn nhiều HS dựa vào trực giác để kết luận.

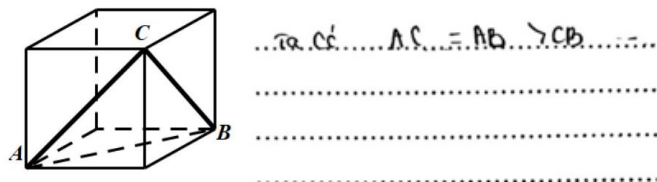
Câu B4 có 7/50 HS trả lời đúng, 32/50 HS trả lời sai, 11/50 HS để trống. Các HS đạt điểm tối đa là 4 vì đã nhận ra tam giác  $ABC$  có ba cạnh bằng nhau do chúng là ba đường chéo của 3 hình vuông bằng nhau hoặc chứng minh ba tam giác vuông bằng nhau. Một số HS đạt điểm 1 vì nhìn thấy tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  dựa vào trực giác (hình 10).



Hình 8



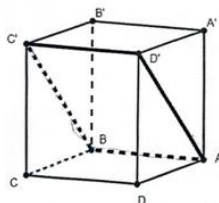
Hình 9



Hình 10

**\* Các câu hỏi kết hợp góc và đoạn thẳng trong hình lập phương**

Ở câu B2, không có HS nào suy luận đúng, có 43/50 HS suy luận sai, 7/50 em để trống không có câu trả lời. Nhiều HS nhận ra tứ giác  $ABC'D'$  là hình bình hành vì có các cặp cạnh đối song song hoặc bằng nhau. Một số HS cố gắng chứng minh  $ABC'D'$  là hình chữ nhật nhưng suy luận sai về góc vuông, chẳng hạn HS cho rằng vì các mặt của hình lập phương vuông góc với nhau nên các đoạn thẳng trên các mặt phẳng đó vuông góc với nhau (hình 11).



...t. góc...  $ABC'D'$  là hình chữ nhật...  
 Vì... các... mặt... phẳng... của... hình... lập... phương...  
 vuông... góc... với... nhau... nên... các... đoạn... thẳng... trên... các...  
 mặt... phẳng... vuông... góc... với... nhau...  
 $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow ABC'D'$  là hình chữ nhật

Hình 11

Câu B3 có 2/50 HS trả lời đúng, 37/50 HS trả lời sai, 11/50 HS không có câu trả lời. Phần lớn HS lập luận được tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành hoặc hình thoi. Tương tự câu B2, HS gặp khó khăn trong việc suy luận tứ giác  $ABCD$  có một góc vuông.

Kết quả tổng hợp điểm bài làm của HS về suy luận không gian các biểu diễn hai chiều trong hình lập phương như sau:

Bảng 2. Tổng hợp kết quả bài làm của HS

Câu	Góc					Đoạn thẳng			Kết hợp góc và đoạn thẳng	
	A1a	A1b	A2	A3	A4	B1a	B1b	B4	B2	B3
Điểm TB /câu	4.00	3.48	2.22	2.28	1.74	3.42	2.28	1.92	1.54	1.46
Điểm TB	2.74					2.54			1.5	
	<b>2.43</b>									

Dựa vào kết quả bảng trên có thể thấy rằng điểm trung bình của bài khảo sát là trên mức trung bình (2.43/4) nhưng không cao. Điểm trung bình của HS về các câu hỏi kết hợp góc và đoạn thẳng trong hình lập phương thì thấp hơn nhiều so với điểm trung bình các câu hỏi liên quan đến độ lớn của góc hoặc độ dài của đoạn thẳng trong hình lập phương (1.5 so với 2.74 và 2.54). Ở câu B2 và B3, phần lớn HS đều nhận ra các tứ giác là hình bình hành, tuy nhiên các em gặp khó khăn trong việc lập luận để chỉ ra tứ giác có một góc vuông. Trong khi đó, các câu A3 và A4 là những câu hỏi liên quan đến việc xác định độ lớn các góc tương tự câu B2 và B3, nhưng các góc được đặt ở vị trí khác của hình lập phương, thì HS đạt kết quả tốt hơn. Điều này cho thấy suy luận của HS về góc hoặc đoạn thẳng riêng lẻ là tốt hơn khi suy luận đối với bài toán kết hợp cả hai yếu tố. Ngoài ra, câu A2 và B4 tương tự nhau, ở câu B4 khi phát hiện ra tam giác cân thì HS đã dừng lại, tuy nhiên ở câu A2 với kết quả tam giác cân thì HS chưa kết luận được độ lớn của góc nên các em tiếp tục chứng minh tam giác đều, như vậy cách đặt câu hỏi khác nhau dẫn đến kết quả đạt được khác nhau. HS đạt điểm cao ở các câu hỏi A1a, A1b và B1a vì các câu này liên quan trực tiếp đến tính chất của hình lập phương mà HS đã được học mà không cần sự biến đổi và suy luận.

Ngoài ra, bảng dưới đây sẽ cho thấy tỉ lệ trung bình các mức độ suy luận không gian HS đạt được.

Bảng 3. Tỉ lệ trung bình các mức độ suy luận không gian của HS

Mức độ	Không trả lời	1	2a	2b	3	4
Góc	8.8%	9.6%	17.6%	2.8%	20.8%	40.4%
Đoạn thẳng	13.3%	14%	10.7%	7.3%	14.7%	40%
Kết hợp góc và đoạn thẳng	18%	34%	26%	4%	16%	2%
Tổng hợp	12%	15.8%	21.6%		18%	32.6%

Từ kết quả của bảng 3 cũng như phân tích định tính, có thể thấy rằng tỉ lệ HS trả lời dựa vào quan sát trực quan, nhìn các hình không gian như các hình phẳng, vẫn còn cao chiếm 15.8%. Phần lớn HS sử dụng suy luận phân tích không gian (mức độ 2a) hoặc kết hợp suy luận phân tích và suy luận tưởng tượng không gian (mức độ 3), mà hiếm khi chỉ sử dụng suy luận tưởng tượng không gian (mức độ 2b) để giải quyết (4.4%). So với các câu hỏi chỉ liên quan đến góc hoặc đoạn thẳng, ở các câu hỏi kết hợp thì tỉ lệ HS đạt mức 4 là rất thấp (2% so với 40.4% và 40%), ngoài ra các câu trả lời dựa vào trực giác cũng nhiều hơn (34% so với 9.6% và 14%), HS có xu hướng sử dụng suy luận phân tích không gian nhiều hơn (26% so với 17.6% và 10.7%), và số HS không làm được cũng nhiều hơn.

### 3. Kết luận

Kết quả nghiên cứu cho thấy, gần 1/3 số HS đạt suy luận không gian ở mức 4. Tuy nhiên, tỉ lệ HS không làm được, hoặc đưa ra các nhận định dựa vào quan sát trực quan vẫn còn cao, số HS sử dụng một trong hai loại suy luận phân tích hoặc suy luận tưởng tượng cao hơn số HS sử dụng kết hợp cả hai loại suy luận này. Một số HS khi kết hợp được hai loại suy luận phân tích và tưởng tượng thì mắc sai lầm về kiến thức. Vì vậy, để phát triển suy luận không gian của HS thì trước hết HS phải suy luận trong hình học phẳng tốt, các kiến thức hình học phẳng sẽ là “nền móng” vững chắc cho HS trong học hình học không gian. Khi dạy nội dung hình học không gian ở cấp THCS, GV cần khuyến khích HS lập luận dựa vào các tính chất của đối tượng chứ không dựa vào hình ảnh trực quan. Nghiên cứu này cho thấy HS còn gặp khó khăn về quan hệ vuông góc trong không gian, cụ thể là các tính chất của hai mặt phẳng vuông góc, đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, vì vậy khi dạy kiến thức này GV cần lấy các ví dụ minh họa cụ thể và tạo nhiều cơ hội cho HS thực hành trên các hình không gian khác nhau. Bên cạnh đó, HS cần được rèn luyện nhiều hơn về suy luận tưởng tượng không gian, để nhận ra các đường thẳng cắt nhau và không cắt nhau, các đoạn thẳng, các góc thuộc hoặc không thuộc mặt phẳng nào, nhận ra các mặt phẳng khác nhau trong không gian.

#### Tài liệu tham khảo

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing. Battista.
- Clements, D. H., Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Vallani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21<sup>st</sup> century: An ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.
- Duval, R. (2017). In M. Tania & M. Campos (Eds.), *Understanding the mathematical way of thinking: the registers of semiotic representations*. Cham: Springer.
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., & Kunimune, S. (2017). Students' geometric thinking with cube representations: assessment framework and empirical evidence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 96-111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.003>
- Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020). Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 235-255. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w>
- Gutierrez, A., Lawrie, C., & Pegg, J. (2004) Characterization of students' reasoning and proof abilities in 3-dimensional geometry. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 511-518).
- Hegarty, M. (2010). Components of spatial intelligence. In *Psychology of learning and motivation* (Vol. 52, pp. 265-297). Academic Press.
- Lowrie, T. (2012). Visual and spatial reasoning: the changing form of mathematics representation and communication. In B. Kaur & T. L. Toh (Eds.), *Reasoning, communication and connections in mathematics: Yearbook 2012, Association of Mathematics Educators* (pp. 149-168). Singapore: World Scientific.
- Lowrie, T., Logan, T., Harris, D., & Hegarty, M. (2018). The impact of an intervention program on students' spatial reasoning: Student engagement through mathematics-enhanced learning activities. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 3(50), 1-10. <https://doi.org/10.1186/s41235-018-0147-y>
- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195. [https://doi.org/10.1016/s0364-0213\(99\)80058-5](https://doi.org/10.1016/s0364-0213(99)80058-5)
- Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M., & Davis, B. (2018). Connecting mathematics learning through spatial reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 30(1), 77-87. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0210-x>
- Nguyễn Thị Hồng Thủy (2018). *Suy luận không gian của học sinh trung học cơ sở*. Luận văn thạc sĩ ngành Lí luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế.
- Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 191-212. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9251-8>
- Trần Sỹ Nhân (2023). *Khả năng suy luận không gian của học sinh lớp 9 về hình chóp và diện tích xung quanh*. Luận văn thạc sĩ ngành Lí luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Huế.