

# DAY HỌC GIẢI TOÁN NỘI DUNG “HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ” (TOÁN 10) NHẪM PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH

Nguyễn Ngọc Giang<sup>1</sup>,  
Phạm Huyền Trang<sup>2+</sup>,  
Trần Thị Ly Ly<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Trường Đại học Ngân hàng Thành phố Hồ Chí Minh;

<sup>2</sup>Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

<sup>3</sup>Trường THPT Dương Văn Thi, thành phố Thủ Đức, Thành phố Hồ Chí Minh  
+ Tác giả liên hệ • Email: phamhuyentrang@hpu2.edu.vn

## Article history

Received: 05/6/2023

Accepted: 30/6/2023

Published: 05/9/2023

## Keywords

Teaching math problem solving, competence, thinking and mathematical reasoning, quadratic functions, graphs

## ABSTRACT

One of the goals of the 2018 General Education Program for Mathematics is to form and develop students' mathematical competence, in which the ability to think and reason mathematically is considered as one of the core components. This study proposes a process of teaching mathematics problem-solving to develop mathematical reasoning and thinking competencies for students in high schools. The proposed process is illustrated through teaching and solving math problems within the topic “Quadratic functions and graphs” (Math 10). In order to develop an effective teaching process of math problem solving and develop mathematical thinking and reasoning competencies for high school students, teachers need to grasp the concept, structure and expressions as well as the expected outcome at different students' cognitive levels of these competencies.

## 1. Mở đầu

Định hướng đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục ở nước ta hiện nay là “chuyển mạnh quá trình giáo dục từ chủ yếu trang bị kiến thức sang phát triển toàn diện năng lực và phẩm chất người học” (Ban Chấp hành Trung ương, 2013). Trong đó, năng lực tư duy và lập luận toán học (TD&LLTH) là một trong những năng lực cơ bản, cần được hình thành và phát triển cho HS THPT (Bộ GD-ĐT, 2018a). Đối với HS phổ thông, năng lực toán học của các em thể hiện trong quá trình giải quyết những vấn đề ở môn Toán, vận dụng môn Toán vào các môn học khác và giải quyết vấn đề thực tiễn. Nội dung môn Toán thường mang tính logic, trừu tượng, khái quát (Bộ GD-ĐT, 2018a). Do đó, để HS hiểu và nắm vững các kiến thức toán học, chương trình môn Toán ở trường phổ thông cần bảo đảm sự cân đối giữa “học” kiến thức và “vận dụng” kiến thức vào giải quyết vấn đề cụ thể. Để hiểu và vận dụng được toán học vào các vấn đề cụ thể thì HS cần phải có năng lực TD&LLTH.

Trong dạy học Toán, hoạt động giải toán giúp người học được trải nghiệm, tập luyện các hoạt động thực hành, vận dụng kiến thức, phương pháp toán học vào giải quyết những vấn đề trong và ngoài môn Toán; HS cần thực hiện các hoạt động nhất định, bao gồm cả nhận dạng và thể hiện định nghĩa, định lí, quy tắc hay phương pháp, những hoạt động toán học phức hợp, hoạt động trí tuệ phổ biến, hoạt động trí tuệ chung và hoạt động ngôn ngữ (Nguyễn Bá Kim, 2017). Do vậy, dạy học giải toán có nhiều cơ hội để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS. Bài báo trình bày khái niệm “năng lực” và “năng lực TD&LLTH”, đề xuất quy trình dạy học giải toán nhằm phát triển năng lực TD&LLTH cho HS ở trường THPT và minh họa quy trình này thông qua dạy học giải toán nội dung “Hàm số bậc hai và đồ thị” (Toán 10).

## 2. Kết quả nghiên cứu

### 2.1. Cơ sở lý luận

#### 2.1.1. Khái niệm “năng lực”

Có nhiều quan điểm và cách tiếp cận khác nhau về khái niệm “năng lực”. Theo Từ điển tiếng Việt: Năng lực là đặc điểm của cá nhân, thể hiện mức độ thông thạo - tức là có thể thực hiện một cách thành thực và chắc chắn một hay một số dạng hoạt động nào đó (Hoàng Phê và cộng sự, 2008). Theo Ru-Đích (1963), năng lực là bản chất tâm lí của cá nhân; người có năng lực thì có thể thực hiện tốt hoạt động này hay hoạt động khác. Theo Gonobolin (1976), năng lực là những thuộc tính tâm lí riêng lẻ của cá nhân, nhờ những thuộc tính này mà con người hoàn thành tốt một hoạt động nào đó và mặc dù phải bỏ ra ít sức lao động nhưng vẫn đạt kết quả cao. Theo Nguyễn Lộc và Nguyễn Thị Lan Phương (2016): Năng lực của một người là nói đến khả năng kết hợp các kiến thức, kĩ năng (nhận thức và thực

hành), thái độ, động cơ, cảm xúc, giá trị, đạo đức để thực hiện các nhiệm vụ trong bối cảnh, tình huống thực tiễn có hiệu quả. Theo Nguyễn Thu Hà (2014), năng lực là sự kết hợp của các khả năng, phẩm chất, thái độ của một cá nhân hoặc tổ chức để thực hiện một nhiệm vụ có hiệu quả cao.

Trong bài báo này, chúng tôi đồng nhất với quan điểm của Chương trình giáo dục phổ thông 2018: Năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kỹ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí,... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể (Bộ GD-ĐT, 2018b).

### 2.1.2. Khái niệm “năng lực tư duy và lập luận toán học”

Theo Nguyễn Quang Uẩn và cộng sự (2012): Tư duy là một quá trình tâm lí phản ánh những thuộc tính bản chất, mối liên hệ và quan hệ bên trong có tính quy luật của sự vật, hiện tượng trong hiện thực khách quan. Theo Lithner (2008): Lập luận là một hoạt động, là quá trình lập luận, trong đó sử dụng tư duy để đi đến một kết luận hoặc đưa ra một nhận định mới đúng. Trong bài báo này, chúng tôi tiếp cận khái niệm “năng lực TD&LLTH” theo quan điểm của Bộ GD-ĐT (2018a): Năng lực TD&LLTH thể hiện thông qua việc HS thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá, tương tự, quy nạp, diễn dịch; chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận; giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học.

Cũng theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán, các thành tố của năng lực TD&LLTH của HS THPT bao gồm: (1) Thực hiện được các thao tác tư duy như so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hoá, khái quát hoá, tương tự; quy nạp, diễn dịch; (2) Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận; sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; (3) Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề, nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện (Bộ GD-ĐT, 2018a).

## 2.2. Quy trình dạy học giải toán nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh ở trường trung học phổ thông

Dựa trên quy trình giải toán của Polya (2010), các thành tố của năng lực TD&LLTH của HS THPT, chúng tôi đề xuất các bước dạy học giải toán nhằm phát triển năng lực TD&LLTH cho HS THPT gồm:

- *Bước 1. Lựa chọn bài toán trong nội dung dạy học có tiềm năng phát triển năng lực TD&LLTH cho HS.* Không phải bài toán nào cũng có nhiều cơ hội phát triển năng lực TD&LLTH cho HS. Để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS một cách hiệu quả, GV cần lựa chọn các bài toán phát huy được các thao tác tư duy cho HS, đặc biệt là các bài toán thực tiễn. Bước này có nhiều cơ hội phát triển thành tố 1 của năng lực TD&LLTH cho HS.

- *Bước 2. Phân tích, tìm tòi lời giải bài toán.* GV nêu câu hỏi, dẫn dắt HS thông qua các câu hỏi để tìm “nút thắt” của lời giải bài toán. Dữ kiện chính của bài toán là gì? Dữ kiện chính dẫn chúng ta đến điều gì? Thông qua các thao tác tư duy như phân tích, so sánh, tương tự hóa, quy lạ về quen, tổng hợp,... HS lập luận để dự đoán, phát hiện mối liên hệ giữa yếu tố đã biết và yếu tố phải tìm. Bước này có nhiều cơ hội phát triển cho HS cả 3 thành tố của năng lực TD&LLTH.

- *Bước 3. Xây dựng cách giải bài toán.* GV cần đặt câu hỏi dẫn dắt, gợi mở các hướng giải khác nhau. HS tư duy sáng tạo, tìm tòi các phương pháp, các thức giải bài toán. GV cần hướng dẫn cho HS kết hợp phương pháp đại số với đồ thị nhằm nhấn mạnh tính tích hợp trong giải toán. Đối với bài toán giải bằng phương pháp đồ thị nên sử dụng phần mềm GeoGebra để giúp HS phát triển tư duy hình học hóa các bài toán đại số. Bước này có nhiều cơ hội phát triển thành tố 1 và thành tố 2 của năng lực TD&LLTH cho HS.

- *Bước 4. Giải bài toán.* HS trình bày cách giải bài toán thông qua lập luận toán học và các phép toán. Bước này có nhiều cơ hội phát triển cả 3 thành tố của năng lực TD&LLTH cho HS.

- *Bước 5. Rút ra kết luận của bài toán.* GV hướng dẫn HS căn cứ vào lời giải bài toán để rút ra kết luận của bài toán. Bước này có nhiều cơ hội phát triển thành tố 2 của năng lực TD&LLTH cho HS.

- *Bước 6. Phát triển bài toán.* GV hướng dẫn HS khai thác và phát triển bài toán, nghiên cứu sâu lời giải bài toán để đề xuất bài toán mới. Bước này có nhiều cơ hội phát triển thành tố 3 của năng lực TD&LLTH cho HS.

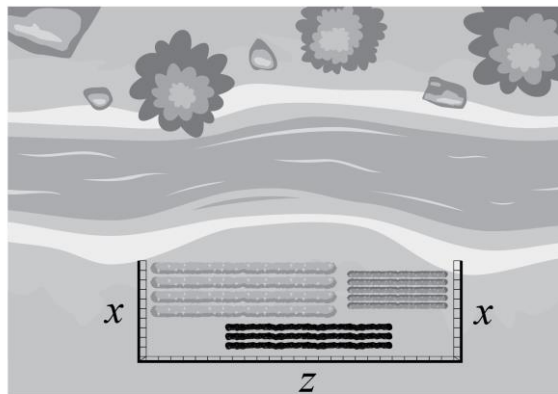
## 2.3. Minh họa dạy học giải toán nội dung “Hàm số bậc hai và đồ thị” (Toán 10) theo hướng phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh

Trong dạy học giải toán nội dung “Hàm số bậc hai và đồ thị” (Toán 10), để phát triển năng lực TD&LLTH cho HS cần thực hiện theo các bước đã đề xuất ở tiểu mục 2.2 như sau:

- *Bước 1. Lựa chọn bài toán về hàm số bậc hai và đồ thị ở lớp 10 có tiềm năng phát triển năng lực TD&LLTH cho HS.* GV cần huy động kiến thức, lựa chọn các bài toán về hàm số bậc hai và đồ thị có tiềm năng phát triển năng

lực TD&LLTH cho HS. Bài toán đưa ra nên là các bài toán thực tiễn. HS sẽ nhận thấy tính thực tiễn, tạo động cơ bên trong và thúc đẩy quá trình học tập của bản thân. Chẳng hạn, GV đưa ra bài toán sau:

**Bài toán 1:** Bác An có 600m hàng rào để rào một mảnh đất hình chữ nhật dọc theo bờ sông. Khu vườn hình chữ nhật sẽ được rào ba cạnh (xem hình 1). Hỏi bác An phải tính xem kích thước  $x$  và  $z$  là bao nhiêu để tổng diện tích mảnh đất được rào là lớn nhất?



Hình 1

- *Bước 2. Phân tích, tìm tòi lời giải bài toán hàm số bậc hai và đồ thị.* GV hướng dẫn HS phân tích, định hướng lời giải bài toán: Vì có tổng là 600m hàng rào nên ta có:  $2x + z = 600 \Leftrightarrow z = 600 - 2x$ .

Vì  $z > 0 \Rightarrow 600 - 2x > 0 \Rightarrow x < 300$ . Gọi  $A$  là tổng diện tích đất rào được thì:  $A = xz$ .

Vậy:  $A(x) = x(600 - 2x) = 600x - 2x^2$ . Vì  $x, z > 0$  nên  $x \in (0; 300)$ . Vậy, bài toán 1 đưa về bài toán sau:

**Bài toán 2:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $A(x) = 600x - 2x^2$  trên  $(0; 300)$ .

- *Bước 3: Xây dựng cách giải bài toán.* GV đưa ra những gợi ý, định hướng cho HS trong quá trình tìm các cách giải bài toán.

*Cách 1 (biến đổi tương đương):* Biến đổi đưa biểu thức  $A(x)$  về dạng  $-C(x)^2 + M(x)$  để rút ra giá trị lớn nhất của  $A(x)$  từ lập luận  $-C(x)^2 \leq 0$ .

*Cách 2 (dùng biệt thức delta):* Từ biểu thức cần tìm của  $A(x)$ , biến đổi đưa về phương trình bậc hai đối với  $x$ . Để  $A(x)$  đạt giá trị lớn nhất thì biệt thức delta phải dương. Từ đây rút ra được giá trị lớn nhất cần tìm.

*Cách 3 (sử dụng đồ thị):* Sử dụng đồ thị để giải bài toán tìm giá trị lớn nhất của một hàm số bậc hai. GV có thể kết hợp với phần mềm toán học động GeoGebra để tìm ra lời giải một cách nhanh chóng và trực quan.

- *Bước 4. Giải bài toán.* Từ những định hướng tìm lời giải đã có, GV yêu cầu HS đưa ra lời giải bài toán như sau:

*Cách 1 (biến đổi tương đương):* Ta có:

$$\begin{aligned} A(x) = 600x - 2x^2 &\Leftrightarrow -2x^2 + 600x - A(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(x^2 - 300x + 22500) + 45000 - A(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2(x - 150)^2 + 45000 - A(x) = 0. \end{aligned}$$

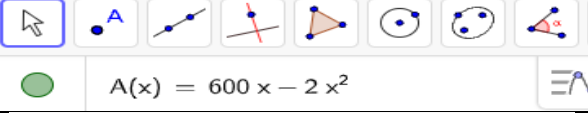

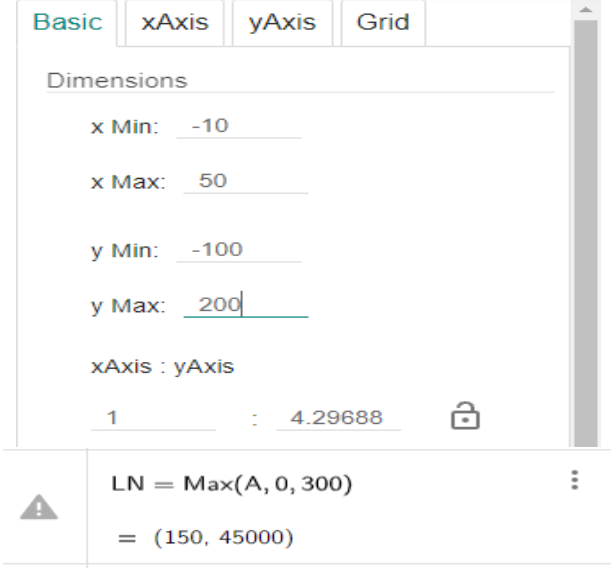
Vì  $-2(x - 150)^2 \leq 0$  nên  $A(x) \leq 45000$ . Vậy, giá trị lớn nhất của  $A(x)$  là 45000 khi  $x = 150$ .

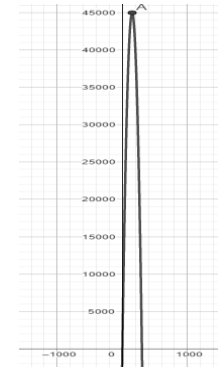
*Cách 2 (dùng biệt thức delta):* Ta có  $A(x) = 600x - 2x^2 \Leftrightarrow -2x^2 + 600x - A(x) = 0$ . Để  $A(x)$  đạt giá trị lớn nhất thì biệt thức delta phải có nghiệm. Hay  $\Delta' = 300^2 - 2A(x) \geq 0$ .

Vậy:  $A(x) \leq \frac{90000}{2} = 45000$ . Giá trị lớn nhất của  $A(x)$  là 45000 khi  $x = 150$ .

*Cách 3 (sử dụng đồ thị):* Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị hàm số  $A(x)$  và tìm giá trị lớn nhất theo các bước như sau (xem bảng 1a):

Bảng 1a. Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị hàm số  $A(x)$  và tìm giá trị lớn nhất

Hình ảnh	Các bước thực hiện
	- Nhập hàm số: $A(x) = 600x - 2x^2$ .
	- Chọn biểu tượng bánh răng để cài đặt các thuộc tính của hệ trục.
	- Nhập: x Min: -10 x Max: 50 y Min: -100 y Max: 200 - Nhập lệnh: $Max(A, 0, 300)$ để xác định giá trị lớn nhất trên $(0; 300)$ của $A(x)$ .



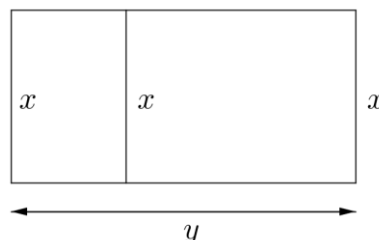
Giá trị lớn nhất của  $A(x)$  là 45000 khi  $x = 150$ .

- *Bước 5. Rút ra kết luận của bài toán.* Từ lời giải bài toán 2, rút ra kết luận bài toán hàm số bậc hai và đồ thị ban đầu như sau: Bác An phải chọn kích thước  $x = 150m$  và  $z = 600 - 2 \times 150 = 300$  (m) để tổng diện tích mảnh đất được rào là lớn nhất.

- *Bước 6. Phát triển bài toán.* Từ bài toán 1, GV đặt câu hỏi: “Nếu chúng ta mở rộng bài toán 600m để rào mảnh đất hình chữ nhật thành bài toán 600m hàng rào để rào hai mảnh đất hình chữ nhật liền kề thì ta được bài toán tương tự nào?”.

GV có thể đưa ra bài toán sau:

**Bài toán 3:** Bác An có 600m hàng rào để rào hai mảnh đất hình chữ nhật liền kề với một hàng rào ở giữa, được minh họa như hình 2. Hỏi bác An phải tính xem kích thước  $x$  và  $y$  là bao nhiêu để tổng diện tích rào hai mảnh đất là lớn nhất?



Hình 2

Vì tổng là 600m hàng rào nên ta có:  $3x + 2y = 600 \Leftrightarrow y = 300 - \frac{3}{2}x$ .

Ta có:  $y > 0 \Rightarrow 300 - \frac{3}{2}x > 0 \Rightarrow x < 200$ . Gọi  $A$  là tổng diện tích đất rào được thì:  $A = xy$ .

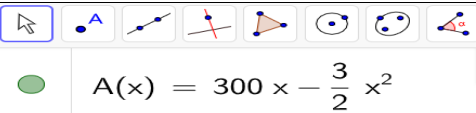

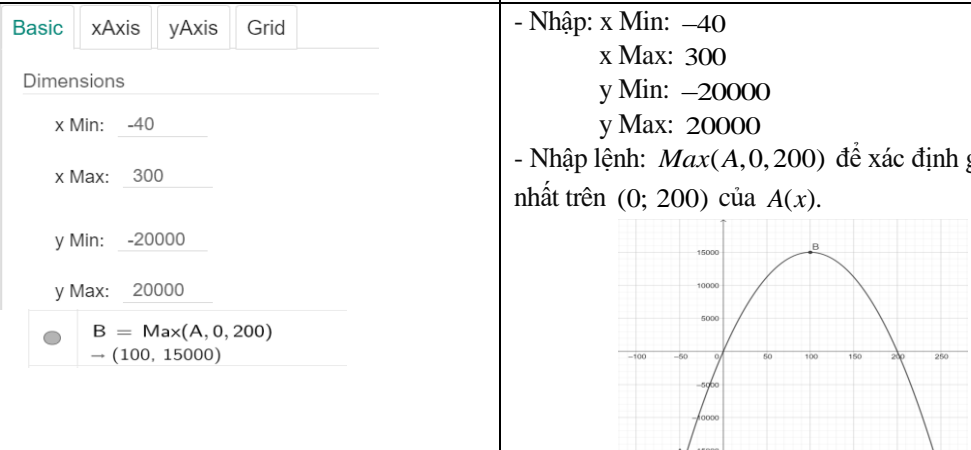
Vậy:  $A(x) = x\left(300 - \frac{3}{2}x\right) = 300x - \frac{3}{2}x^2$ . Vì  $x, y > 0$  nên  $x \in (0; 200)$ . Vậy bài toán 3 đưa về bài toán sau:

**Bài toán 4:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $A(x) = 300x - \frac{3}{2}x^2$  trên  $(0; 200)$ .

Vi bài toán 4 tương tự với bài toán 2 nên GV yêu cầu HS đưa ra 3 cách giải tương tự như bài toán 2, đó là biến đổi trong đương, sử dụng biệt thức delta và đặc biệt chú trọng đến cách giải bằng đồ thị.

Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị hàm số  $A(x)$  và tìm giá trị lớn nhất theo các bước (cách giải bằng phương pháp đồ thị) như sau (xem bảng 1b):

Bảng 1b. Sử dụng phần mềm GeoGebra vẽ đồ thị hàm số  $A(x)$  và tìm giá trị lớn nhất

Hình ảnh	Các bước thực hiện
	- Nhập hàm số $A(x) = 300x - \frac{3}{2}x^2$
	- Chọn biểu tượng bánh răng để vào cài đặt các thuộc tính của hệ trục.
	- Nhập: x Min: -40 x Max: 300 y Min: -20000 y Max: 20000 - Nhập lệnh: $Max(A, 0, 200)$ để xác định giá trị lớn nhất trên $(0; 200)$ của $A(x)$ .

Giá trị lớn nhất của  $A(x)$  là 15000 khi  $x = 100$ . Vậy bác An cần rào mảnh vườn hình chữ nhật với chiều rộng  $x = 100m$  và chiều dài  $y = 150m$  thì tổng diện tích hai mảnh đất được rào là lớn nhất.

GV dẫn dắt HS phát triển bài toán 1 thành bài toán 5 tương tự nhưng ở mức độ khó hơn như sau:

**Bài toán 5:** Một người làm vườn muốn xây dựng một khu vườn hình chữ nhật rộng  $1000m^2$  dọc theo bờ sông. Khu vườn hình chữ nhật sẽ được rào ba cạnh (như hình 1). Người làm vườn có kế hoạch sử dụng hàng rào bằng thép trang trí với giá 18 đô la/ $1m^2$  ở cạnh đối diện sông và hàng rào thông thường với giá 4 đô la/ $1m^2$  ở hai cạnh bên còn lại. Tính các cạnh của khu vườn để chi phí xây dựng là ít nhất. Chi phí tối thiểu tương ứng là bao nhiêu?

GV đưa ra gợi ý như sau: Gọi  $z$  là độ dài cạnh hình chữ nhật đối diện với sông và  $x$  là độ dài của một trong hai cạnh bên của khu vườn ( $z > 0, x > 0$ ), đơn vị là mét (m).

Tổng chi phí để dựng hàng rào là:  $C = 18z + 8x$ .

Vi diện tích khu vườn là  $1000m^2$  nên  $xz = 1000 \Leftrightarrow z = \frac{1000}{x}$ . Suy ra  $C(x) = \frac{18000}{x} + 8x$ , với  $x > 0$ .

Ta có bài toán 6 tương đương:

**Bài toán 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $C(x)$  thỏa mãn phương trình  $8x^2 - C(x).x + 18000 = 0$  trên  $(0; +\infty)$ .

GV có thể yêu cầu HS giải bài toán bằng biệt thức delta: Để hàm số  $C(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất thì biệt thức  $\Delta = C(x)^2 - 4.8.18000 \geq 0 \Leftrightarrow C(x) \geq \sqrt{576000}$ .

Vậy  $C(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên  $(0; +\infty)$  tại  $x = 47,43$  và  $\min_{(0;+\infty)} C(x) \approx 758,95$ .

Với  $x = 47,43$  thì  $z \approx 21,08$ . Ta có kết luận: Để chi phí ít nhất thì chiều dài và chiều rộng của khu vườn lần lượt xấp xỉ là  $47,43m$  và  $21,08m$ . Khi đó, chi phí để xây dựng xấp xỉ là  $758,95$  (đô la).

### 3. Kết luận

Năng lực TD&LLTH có vai trò quan trọng đối với HS phổ thông. Thực tiễn dạy học Toán ở trường phổ thông đã cho thấy năng lực TD&LLTH không chỉ được thể hiện trong quá trình HS lập luận để giải toán mà còn thể hiện khi các em ứng dụng toán học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn. Khi vẽ đồ thị trong quá trình giải toán, GV có thể sử dụng các công cụ, phương tiện dạy học chuyên về hình học như phần mềm GeoGebra. Phần mềm GeoGebra cho phép vẽ đồ thị hàm số bậc hai một cách nhanh chóng, chính xác; hỗ trợ người học tìm ra được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bằng lệnh Max hoặc Min. Do vậy, việc dạy học nội dung “Hàm số bậc hai và đồ thị” có sử dụng phần mềm GeoGebra trở nên sinh động và hiệu quả hơn. Bên cạnh đó, để quy trình dạy học giải toán nhằm phát triển năng lực TD&LLTH cho HS THPT đạt hiệu quả, GV cần hiểu rõ quan niệm, cấu trúc và biểu hiện của năng lực TD&LLTH, mức độ yêu cầu cần đạt của năng lực này ở từng giai đoạn nhận thức của HS THPT.

### Tài liệu tham khảo

- Ban Chấp hành Trung ương (2013). *Nghị quyết số 29-NQ/TW ngày 04/11/2013 về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa trong điều kiện kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa và hội nhập quốc tế*.
- Bộ GD-ĐT (2018a). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Bộ GD-ĐT (2018b). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).
- Gonobolin, Ph.N (1976). *Những phẩm chất tâm lý của người giáo viên*. NXB Giáo dục.
- Hoàng Phê (chủ biên, 2008). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Đà Nẵng.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276. <https://doi.org/10.1007/10649-007-9104-2>
- Nguyễn Bá Kim (2017). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn Lộc, Nguyễn Thị Lan Phương (đồng chủ biên, 2016). *Phương pháp, kỹ thuật xây dựng chuẩn đánh giá năng lực đọc hiểu và năng lực giải quyết vấn đề*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- Nguyễn Quang Uẩn, Nguyễn Văn Lũy, Đinh Văn Vang (2012). *Tâm lý học đại cương*. NXB Đại học Sư phạm.
- Nguyễn Thu Hà (2014). Giảng dạy theo năng lực và đánh giá theo năng lực trong giáo dục: Một số vấn đề lý luận cơ bản. *Tạp chí Khoa học, Đại học Quốc gia Hà Nội: Nghiên cứu Giáo dục*, 30(2), 56-64.
- Polya, G. (2010). *Giải một bài toán như thế nào?* NXB Giáo dục Việt Nam.
- Ru-Đích, P. A. (1963). *Tâm lý học thể thao*. NXB Thể dục Thể thao.